Lösungen

Prüfungsinhalt Teil A

1.1 Feld 3: Die Extremstelle lautet: $x_E = \frac{1}{a}$.

1.2 Feld 1: Der maximale Anstieg beträgt: $f'(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$.

1.3 Feld 5: Die Stammfunktion lautet $H(x) = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{5}{3}$.

1.4 Feld 4: Die Ebene $\varepsilon_4 : 6y - 5z = 25$ schneidet die Gerade im Punkt P senkrecht.

1.5 Feld 5: Die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{10}{216} = \frac{5}{108}$.

2. Lokale Extrempunkte:

$$f_k(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + x^2 + k \cdot x \qquad 0 = x^2 + 2x + k$$

$$f_k'(x) = x^2 + 2x + k \qquad D = 1 - k > 0 \Rightarrow k < 1$$

Für $k < 1$ gibt es genau zwei lokale Extrempunkte.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

3. Rotationskörper: $f(x) = \sqrt{x+4}$

Grenzen: $x = -4$ und $x = 0$

$$V_x = \pi \cdot \int_{-4}^{0} y^2 dx = \pi \cdot \int_{-4}^{0} (x+4) dx$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{x^2}{2} + 4x\right]_{-4}^{0} = \pi \cdot (0+0) - \pi \cdot (8-16) = \underline{\underline{8\pi}}$$

Erreichbare BE-Anzahl: 4

4. Dreieck PQR:

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{64+64+16} = \sqrt{144} = 12$$

$$\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{64+16+64} = \sqrt{144} = 12$$

$$\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{QR}\right| = \sqrt{144+144} = \sqrt{288}$$

$$\overrightarrow{PQ} \circ \overrightarrow{PR} = 64 - 32 - 32 = 0$$

Das Dreieck ist gleichschenklig und rechtwinklig.

Erreichbare BE-Anzahl: 4

5. Lagebeziehung:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig, also kann es sich nur um windschiefe oder schneidende Geraden handeln.

$I: t = 1$ $\quad$ $I: t = 1$

$II: 2 + 2t = -1 + 2s$ $\quad$ $II: 4 = -3$ f.A.

$III: 3 = 6 + 3s$ $\quad$ $III: s = -1$

Das LGS ist nicht lösbar. Die Geraden sind windschief.

Abstand:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{PQ} \circ \vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{36+9+4}} = \frac{6+9+6}{7} = \frac{21}{7} = 3$$

Erreichbare BE-Anzahl: 5

6. V ... verschiedene Münzen

Z ... 2,00€-Münze ist dabei

$$P_V(Z) = \frac{0,2+0,1+0,2+0,1}{1-0,1-0,1} = \frac{0,6}{0,8} = \frac{6}{8}$$

$$= \underline{\underline{0,75}}$$

Erreichbare BE-Anzahl: 3

Prüfungsinhalt Teil B

Aufgabe B1

a) Geben Sie die maximale und die minimale Höhe der Halle I an.

$f(4) = 3,7$ maximale Höhe: 3,70 m

$f(1) = 2,8$ minimale Höhe: 2,80 m

$4 - 2,35 = 1,65$

$f(1,65) = 3,14775 > 3,05$

Der Bus passt in die Halle I.

maximale Höhe des 2,55m-breiten Busses:

$4 + 2,55 = 6,55$

$g(6,55) \approx 3,3587$

Die maximale Höhe beträgt 3,35 m.

Bestimmen Sie den maximalen Neigungswinkel des Daches gegenüber der Horizontalen zwischen den Punkten A und B.

$m = f'(0,5) = 0,7$

$\alpha_1 = \arctan(0,7) \approx 34,99°$

Bestimmen Sie den maximalen Neigungswinkel des Daches gegenüber der Horizontalen zwischen den Punkten C und D.

Lösungen

Ansatz für die Wendestelle mit GTR

$m = g'(6) = -0,45$

$\alpha_2 = \arctan(0,45) \approx 24,23^{\circ}$

Erreichbare BE-Anzahl: 11

b) Vergleich der Volumina:

1. Variante: Fläche

$A_1 = \int_1^4 f(x)dx = 10,2$

$A_2 = \int_4^7 g(x)dx = 11,334375$

$\frac{A_2}{A_1} \approx 1,111$

2. Variante: Volumen

$V_1 = \int_1^4 f(x)dx \cdot 13,5 = 137,7$

$V_2 = \int_4^7 g(x)dx \approx 153,014$

$\frac{V_2}{V_1} \approx 1,111$

Das Volumen der Halle II ist um 11,1% größer.

Dachfläche:

$L_1 = \int_{0,5}^{4} \sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx \approx 3,7678$

$L_2 = g(4) - f(4) = 0,5$

$L_3 = \int_{4}^{7,5} \sqrt{1+[g'(x)]^2} \approx 3,7049$

$L = L_1 + L_2 + L_3 \approx 7,9727m \Rightarrow A = 13,50m \cdot 7,9727m \approx \underline{\underline{107,63m^2}}$

Erreichbare BE-Anzahl: 8

c) Regen:

Gerade durch A mit dem Anstieg m:

$A(0,5 \mid 2,475)$

$m = -4$

$y = -4x + n$

$2,475 = -4 \cdot 0,5 + n$

$4,475 = n$

$y = g(x) = -4x + 4,475$

Schnittpunkt mit x = 1: $g(1) = \underline{\underline{0,475}}$

Bis zu einer Höhe von 47,5 cm wird die Wand nass.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

d) äußerer Punkt: $A(4 \mid 4,2)$

Allgemeine Tangentengleichung an den Graphen von f:

$t(x) = (-0,2a + 0,8a) \cdot (x - a) - 0,1a^2 + 0,8a + 2,1$

$4,2 = (-0,2a + 0,8a) \cdot (4 - a) - 0,1a^2 + 0,8a + 2,1$

Solver : $a = 1,7639$

$m = f'(a) = \underline{\underline{0,4472}}$

Erreichbare BE-Anzahl: 3

e) Scheinwerfer an der Decke:

Zielfunktion:

$$g(5,5) = 3,8203125 \Rightarrow S(5,5 \mid 3,4203125)$$

$$d(x) = \sqrt{(x-5,5)^2 + (g(x) - g(5,5))^2}$$

$$= \sqrt{(x-5,5)^2 + (g(x) - 3,4203125)^2}$$

$$d_{min} = \underline{\underline{0,3675}}$$

Der Abstand beträgt etwa 37 cm.

Erreichbare BE-Anzahl: 5

f) Ein- und Aussteigen:

E ... Jemand steigt ein.

A ... Mindestens einer steigt aus.

$$P(E) = 0,3$$

$$X \sim B(20; 0,05)$$

$$P(A) = P(X \geq 1) = 1 - 0,95^{20} = 0,6415$$

$$P(H) = 1 - P(\overline{E}) \cdot P(\overline{A}) = 1 - 0,3 \cdot 0,95^{20} = \underline{\underline{0,74905}}$$

Erreichbare BE-Anzahl: 5

g) Verspätung in Stralsund:

$$X \sim N(300; \sigma)$$

$$P(X \leq 345) = 0,75$$

$$P\left(\frac{345-300}{\sigma}\right) = 0,75$$

$$\frac{45}{\sigma} = 0,6745$$

$$\sigma \approx \underline{\underline{66,72\,\text{min}}}$$

$$P(X \geq 355) \approx \underline{\underline{0,2049}}$$

Erreichbare BE-Anzahl: 4

h) Busunternehmen vs. Stadtverwaltung:

$H_o: p \leq 0,8 \qquad n = 120 \qquad \alpha = 0,05$

Es wird ein rechtsseitiger Signifikanztest verwendet.

kritischer Bereich: $K = \{104, ..., 120\}$

Annahmebereich: $A = \{0, ..., 103\}$

Erreichbare BE-Anzahl: 4

Aufgabe B2

a) Geben Sie die Gesamthöhe der Halle an.

Die Gesamthöhe beträgt 8 m.

Nachweis, dass F auf der x-Achse liegt.

$$y_F = y_A - 20 \cdot \cos 60^o$$

$$= 10 - 20 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Punkte:

$C(-\sqrt{300}\ |\ 40\ |\ 0)$, $D(-2\sqrt{300}\ |\ 30\ |\ 0)$

$E(-2\sqrt{300}\ |\ 10\ |\ 0)$, $F(-\sqrt{300}\ |\ 0\ |\ 0)$

Ermitteln Sie den Abstand der Kante $\overline{AB}$ von der Spitze S.

$$d = \sqrt{\sqrt{300}^{\,2} + 8^2} = \sqrt{364} \approx \underline{\underline{19,08m}}$$

Grundfläche (Regelmäßiges Sechseck oder doppeltes Trapez):

$$A = 6 \cdot \frac{1}{2}(20m)^2 \cdot \sin 60^o \qquad A = 30m \cdot \sqrt{300}\,m \cdot 2$$

$$A = 1039,23m^2 \qquad A = 1039,23m^2$$

Erreichbare BE-Anzahl: 11

b) Einschränkung des Parameters: $0 < h < 8$.

Berechnen Sie das Volumen der Schwimmhalle in Abhängigkeit von h.

$$V = A_G \cdot h + \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot (8-h)$$

$$V = 1039,23m^2 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot 1039,23m^2 \cdot (8-h)$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Dachfläche in Abhängigkeit von h.

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OG_h} + \overrightarrow{OH_h}}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ h \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ h \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sqrt{300} \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{300} \\ 0 \\ h-8 \end{pmatrix}$$

$$h_s = \left|\overrightarrow{SM}\right| = \sqrt{300 + (h-8)^2}$$

$$A = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_s = \underline{\underline{60 \cdot \sqrt{300 + (h-8)^2} \cdot m^2}}$$

Erreichbare BE-Anzahl: 9

c) Eine Säule befindet m Punkt $P(-7\ |\ 20\ |\ 0)$:

Ebene durch G_4H_4S: $G_4(0\ |\ 10\ |\ 4)$, $H_4(0\ |\ 30\ |\ 4)$ und $S(-\sqrt{300}\ |\ 20\ |\ 8)$.

$$E: 80x + 346,41z = 1385,64$$

$$x = -7 \Rightarrow z = \underline{\underline{5,616}}$$

Die Höhe beträgt etwa 5,62 m.

$$E_1: 80x + 346,4101615z = 1385,640646$$

$$E_2: 80x + 346,4101615z = d$$

Lösungen

$$P_1(0 \mid 10 \mid 4) \in E_1$$

$$P_2\left(\frac{d}{80} \mid 0 \mid 0\right) \in E_2$$

$$d = \frac{\left|\overrightarrow{P_1P_2} \circ \vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|} = \left|\begin{pmatrix} \frac{d}{80} \\ -10 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0,2250 \\ 0 \\ 0,9743547 \end{pmatrix}\right|$$

$$|0,0028125 \cdot d - 3,8974188| = 4$$

$$d_1 = -36,4733$$

$$(d_2 = 2807,97)$$

$$E_2: \underline{\underline{80x + 346,4101615z = -36,4733}}$$

Erreichbare BE-Anzahl: 10

d) Werte von h für Planungsvarianten:

$$\overrightarrow{AG_h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ h \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{SG_h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ h \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sqrt{300} \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{300} \\ -10 \\ h-8 \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{h-8}{\sqrt{400+(h-8)^2}}$$

$$\text{Solver}: \alpha = 100^\circ \Rightarrow h = 4,47346$$

$$\text{Solver}: \alpha = 105^\circ \Rightarrow h = 2,641$$

$$\underline{\underline{2,641 < h < 4,473}}$$

Erreichbare BE-Anzahl: 5

e) Eintritt für die Schwimmhalle:

$$E(X) = 5 \cdot 0,22 + ... + 5,5 \cdot 0,15 = \underline{\underline{4,766}}$$

$$P_E(T) = \frac{13}{22+5+13} = \frac{13}{40} = \underline{\underline{0,325}}$$

$$P_Z(E) = \frac{22+5}{22+5+38+7} = \frac{27}{72} = \underline{\underline{0,375}}$$

Erreichbare BE-Anzahl: 6

f) Lina und Lena:

$$P(D) = 0,9 \cdot 0,9 \cdot 0,1$$

$$= \underline{\underline{0,081}}$$

$$P(X \geq 1) \geq 0,8$$

$$P(X = 0) \leq 0,2$$

$$0,9^n \leq 0,2 \Rightarrow n \geq \underline{\underline{16}}$$

Lina bekommt mit einer W. von 8,1% erst beim 3-mal einen Ball.

Lena muss das Schwimmbad mindestens 16-mal besuchen.

Erreichbare BE-Anzahl: 4