Sportgymnasium Dresden

Probeteil 1

In den Aufgaben 1 bis 5 ist jeweils genau eine Antwortmöglichkeiten richtig. Kreuzen Sie das jeweilige Feld an.

1. Die Funktion $f(x) = \frac{x-5}{x-3}$ besitzt an der Stelle

■ $x_0 = 3$ eine Polstelle.

□ $x_0 = 3$ eine Lücke.

□ $x_0 = 3$ eine Nullstelle.

□ $x_0 = 5$ eine Polstelle.

□ $x_0 = 5$ eine Lücke.

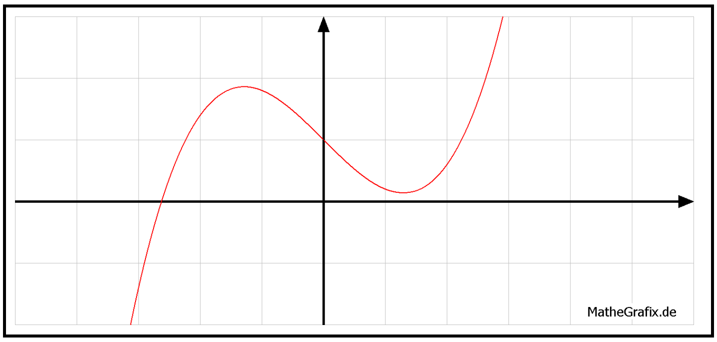
2. Die Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ an der Stelle $x = 2$ schneidet die Ordinatenachse im Punkt:

□	□	■	□	□
$S(0 \mid \frac{1}{2})$	$S(0 \mid -\frac{1}{2})$	$S(0 \mid 1)$	$S(0 \mid -1)$	$S(0 \mid 0)$

3. In einem Osternest befinden sich 3 zufällig ausgewählte Eier in 4 möglichen Farben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind im Osternest Eier in mindestens 2 verschiedenen Farben?

□	□	□	■	□
$\frac{11}{12}$	$\frac{63}{64}$	$\frac{61}{64}$	$\frac{15}{16}$	$\frac{52}{56}$

4. Gegeben ist der Graph der 1. Ableitung von f.



Welche Aussage kann man über die Funktion f in diesem Intervall treffen?

□ Die Funktion f ist im gesamten Definitionsbereich streng mononton steigend.

□ Die Funktion f besitzt genau 2 lokale Extrempunkte.

■ Die Funktion f besitzt 2 Wendepunkte.

□ Die Funktion f besitzt 1 lokalen Hochpunkt.

□ Die Funktion f besitzt mindestens 1 Nullstelle.

5. Gegeben sind beiden Punkte $A(6 \mid 12 \mid 0)$ und $B(-3 \mid 24 \mid 21)$.
   Welcher Punkt liegt auf der Geraden $\overline{A_a B_a}$?

■	☐	☐	☐
$C(-6 \mid 28 \mid 28)$	$C(9 \mid -12 \mid -21)$	$C(\frac{9}{2} \mid 18 \mid \frac{21}{2})$	$C(-\frac{9}{2} \mid 6 \mid \frac{21}{2})$

Erreichbare BE-Anzahl: 5

6. Gegeben sind ist die Gerade g mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und die Ebene

   E mit $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   Untersuchen Sie die Lagebeziehung und berechnen Sie den eventuell vorhandenen Schnittpunkt.

   Normalenvektor der Ebene:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{x} \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+16 \\ -(4+4) \\ -8-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -8 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Skalarprodukt von Normalenvektor und Richtungsvektor:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2-1-2 = -1$$

   Die Vektoren sind nicht senkrecht zueinander. Deshalb schneidet die Gerade die Ebene. (Mist, jetzt muss man noch den Schnittpunkt ausrechnen.)

   Ebenengleichung:

   $E: 2x - y - z = -2$

   Einsetzen der Gerade in die Ebene:

$$\begin{aligned} 2(1+t) - t - (3+2t) &= -2 \\ 2 + 2t - t - 3 - 2t &= -2 \\ -t &= -1 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

   Schnittpunkt:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{S(2 \mid 1 \mid 5)}}$$

Erreichbare BE-Anzahl: 4

7. Der Graph von f mit $f(x) = -2x^2 + 18$ und schließt mit den Koordinatenachsen eine Fläche vollständig ein. Die Fläche erzeugt durch Rotation um die Ordinatenachse einen Körper. Berechnen Sie den Rauminhalt dieses Körpers.

Umkehrfunktion:

$$\bar{f}(y) = x = \sqrt{\frac{y-18}{-2}}$$

$$x^2 = \frac{y-18}{-2}$$

Grenzen:

$$a = 3 \Rightarrow f(3) = 0$$

$$b = 0 \Rightarrow f(0) = 18$$

Ansatz und Lösung:

$$V_y = \pi \int_{f(b)}^{f(a)} x^2 dy$$

$$V_y = \pi \int_0^{18} \frac{y-18}{-2} dy = \pi \int_0^{18} 9 - \frac{y}{2} dy = \pi \left[9y - \frac{y^2}{4} \right]_0^{18} dy$$

$$= \pi(162 - 81) - \pi(0 - 0) = \underline{\underline{81\pi}}$$

Erreichbare BE-Anzahl: 4

8. Herr Leibniz wirft so lange einen Würfel, bis die Augensumme eine Quadratzahl ist. Er wirft aber höchstens 3-mal.

Berechnen Sie, wie viele Würfe zu erwarten sind.

X = 1: (1), (4)

X = 2: (22), (31), (36), (54), (63)

$X = x_i$	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{5}{36}$	$1 - \frac{12}{36} - \frac{5}{36} = \frac{19}{36}$

$$E(X) = 1 \cdot \frac{12}{36} + 2 \cdot \frac{5}{36} + 3 \cdot \frac{19}{36} = \frac{12+10+57}{36} = \frac{79}{36}$$

Erreichbare BE-Anzahl: 2