LB: Skalarprodukt

1.Gegeben sind die Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} ; \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Produkte.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \; ; \quad \vec{a} \circ \vec{c} = 2 \; ; \quad \vec{b} \circ \vec{c} = 4$$

b) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{c}$.

$$\cos\beta = \frac{2}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{6}}$$

$$\beta = \underline{\underline{77{,}40^\circ}}$$

2. Gegeben sind die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie das Kreuzprodukt:

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 140 \\ -139 \\ 49 \end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie, dass der Vektor $\vec{w}$ senkrecht auf den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ steht.

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 140 \\ -139 \\ 49 \end{pmatrix} = 1120 - 973 - 147 = 0$$

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 140 \\ -139 \\ 49 \end{pmatrix} = -980 + 980 = 0$$

c) Zeigen Sie, dass die Aussage b) allgemeingültig ist.*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} bz - cy \\ cx - az \\ ay - bx \end{pmatrix} =$$

$$abz - acy + bcx - abz + acy - bcx$$

$$= abz - abz + acy - acy + bcx - bcx = 0$$

Analog wird mit dem anderen Vektor verfahren.

LB: Skalarprodukt

3. Für welchen Wert a verlaufen die Geraden senkrecht zueinander?

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R})$$

$$\begin{pmatrix} 40 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} = 40 + 2a - 30 = 10 + 2a$$

$$10 + 2a = 0$$

$$\underline{\underline{a = -5}}$$

4. Für welchen Wert k verlaufen die Ebenen senkrecht zueinander?

$$E_k: 4x - y + kz = 20 \qquad \varepsilon: 3x - \tfrac{1}{2}z = 1$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 12 - \frac{k}{2}$$

$$12 - \frac{k}{2} = 0$$

$$\underline{\underline{k = 24}}$$

5. Untersuchen Sie, ob es Werte a und k gibt, sodass die Gerade h_a die Ebene E_k senkrecht schneidet.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ k \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ k \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 4 = t \\ -1 = 4 \cdot a \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \\ k = 4 \cdot 3 \Rightarrow k = 12 \end{array}$$

Für $a = -\frac{1}{4}$ und $k = 12$ sind die beiden senkrecht zueinander.

6. Untersuchen Sie, ob es Werte a und k gibt, sodass die Gerade h_a und die Ebene E_k parallel zueinander verlaufen.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ k \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 4 - a + 3k = 0 \Rightarrow a = 4 + 3k$$

Für $a = 4 + 3k$ mit $k \in \mathbb{R}$ sind die beiden parallel zueinander.