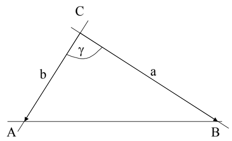
# Das Skalarprodukt

## Zielorientierung:

*Das Skalarprodukt hat mehrere Bedeutungen:*

- *Berechnung des Schnittwinkels von Objekten (z.B. zwischen Vektoren)*
- *Berechnung des Abstandes von Objekten (Projektion von Vektoren)*
- *Beschreiben von Punktmengen (z.B. Ebenen)*

Herleitung: Gegeben ist ein Dreieck ABC mit dem Winkel $\gamma$.




Ausgehend vom Kosinussatz gilt für zwei Vektoren:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\gamma$$

mit :

$$\left|\vec{a}\right|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

$$\left|\vec{b}\right|^2 = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = (b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2$$

Diese quadratischen Beträge werden in den Kosinussatz eingesetzt.
Dabei werden die quadratischen Terme eliminiert.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\gamma$$

$$(b_x - a_x)^2 + (b_y - a_y)^2 + (b_z - a_z)^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 + b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - 2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\gamma$$

$$b_x^2 - 2a_xb_x + a_x^2 + b_y^2 - 2a_yb_y + a_y^2 + b_z^2 - 2a_zb_z + a_z^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 + b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 - 2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\gamma$$

$$-2a_xb_x - 2a_yb_y - 2a_zb_z = -2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\gamma \quad | \div(-2)$$

$$a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\gamma$$

Bemerkung: Sie wissen bestimmt noch nicht, was das soll. Aber wir haben soeben das Skalarprodukt hergeleitet. Das Skalarprodukt kann auf 2 verschiedene Weisen berechnet werden. Die linke Seite wird als Definition festgelegt. Die rechte Seite ergibt dann einen Satz.

Definition: Die Zahl $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$ heißt Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Satz: Für zwei Vektoren gilt: $\vec{a} \circ \vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\gamma$

# Das Skalarprodukt

*Bemerkung:*
Das Skalarprodukt ist also eine Funktion, die 2 Vektoren auf eine Zahl abbildet:
$f(\vec{x}, \vec{y}) \rightarrow c \in \mathbb{R}$
Das Ergebnis ist durch einen Zahlenwert charakterisiert, eine sogenannte skalare Größe.

*Beispiel:* Erwartungswert

$$E(X) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \\ p_n \end{pmatrix} = x_1 \cdot p_1 + \dots + x_n \cdot p_n$$

*Beispiel:* Gesamtpreis beim Einkaufen

5 Milchbrötchen, 3 altdeutsche Brötchen, 1 Roggenbrot €

$$G = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0,29€ \\ 0,45€ \\ 2,15€ \end{pmatrix} = 1,45€ + 1,35€ + 2,15€ = 4,95€$$

Doch in der Geometrie wird es noch spannender ...

## Winkel zwischen 2 Vektoren

*Es gilt:*

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right| \cos\gamma \mid \div \left(\left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right|\right)$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right|}$$

*Satz:* Für zwei Vektoren mit $\vec{a} \neq \vec{o}$ und $\vec{b} \neq \vec{o}$ gilt:

$$\boxed{\cos \sphericalangle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \left|\vec{b}\right|}}.$$

*Beispiel:* Gesucht ist der Schnittwinkel zwischen den beiden Vektoren.

$$\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{17}} = \frac{13}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{17}} = 0,5855$$

$$\gamma \approx \underline{\underline{54,16^\circ}}$$

# Das Skalarprodukt

*Festigung:*

$$\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}6\\2\\-3\end{pmatrix}}{\sqrt{49}\cdot\sqrt{49}} = \frac{12+6-18}{49} = 0$$

$$\gamma = 90^\circ$$

$$\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix}1\\5\\8\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-8\\0\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{90}\cdot\sqrt{65}} = \frac{-8+8}{\sqrt{90}\cdot\sqrt{65}} = 0$$

$$\gamma = 90^\circ$$

$$\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix}4\\8\\-2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}6\\12\\-3\end{pmatrix}}{\sqrt{84}\cdot\sqrt{189}} = \frac{126}{\sqrt{84}\cdot\sqrt{189}} = 1$$

$$\gamma = 0^\circ$$

$$\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix}3\\0\\-6\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}}{\sqrt{45}\cdot\sqrt{20}} = \frac{-6-24}{\sqrt{45}\cdot\sqrt{20}} = -1$$

$$\gamma = 180^\circ$$

$$\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{2+1+2}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\gamma = 33,56^\circ$$

$$\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\gamma = 60^\circ$$

*Satz:* Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn gilt: $\vec{a}\circ\vec{b} = 0$.

Wir kennen damit eine geniale Möglichkeit, Vektoren auf Orthogonalität zu überprüfen. Für diesen Fall benötigt man also den Betrag der Vektoren nicht.

*Auftrag: Bestimmen Sie Vektoren, die orthogonal zueinander sind.*

Spiel: Der erste Schüler sagt einen Vektor, der nächste einen dazu orthonalen usw.

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix}5\\0\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} = 0$$