Schnittwinkel zwischen Geraden und Ebenen

(0) Schnittwinkel zwischen 2 Vektoren (Wiederholung)

Bemerkung: Der Schnittwinkel von Vektoren kann wie folgt berechnet werden:

$$\boxed{\cos\gamma = \frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}}$$

Für diesen Winkel gilt: $0° \le \gamma \le 180°$.

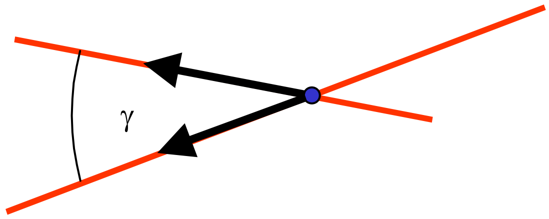
Allerdings gibt es immer 2 Schnittwinkel zwischen 2 Geraden. Welcher Winkel ist denn nun gemeint? Nun, man meint immer den kleineren der beiden. Deshalb ist folgende Festlegung sinnvoll.

Definition: Der Winkel zwischen Ebenen und Geraden ist niemals größer als 90°.*

(1) Schnittwinkel zwischen 2 Geraden

Satz: Der Schnittwinkel von Geraden kann mit Hilfe der Richtungsvektoren berechnet werden:

$$\boxed{\cos\gamma = \frac{\left|\vec{a_1}\circ\vec{a_2}\right|}{|\vec{a_1}|\cdot|\vec{a_2}|}}$$



Auftrag:
Begründen Sie, dass sich die Geraden schneiden.
Berechnen Sie den Schnittpunkt und den Schnittwinkel.

Beispiel:

$$g_k : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Schnittpunkt: $\underline{\underline{S(4\mid 8\mid 0)}}$

$$\cos\gamma = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{50}} = \frac{|-4+6-5|}{\sqrt{300}} = \frac{3}{\sqrt{300}} = \frac{\sqrt{3}}{10}$$

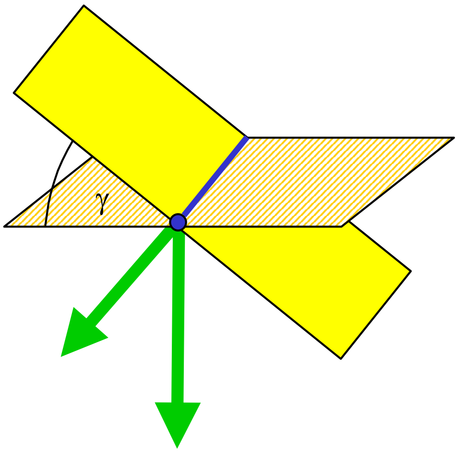
$$\underline{\underline{\gamma \approx 80{,}0°}}$$

Für 2 Geraden haben wir also das Problem gelöst. Aber wie sieht das nun für 2 Ebenen aus. Dazu muss man sich zunächst einmal 2 Ebenen vorstellen, die sich schneiden.

(2) Schnittwinkel von Ebenen

Ebenen schneiden sich, wenn die Normalenvektoren nicht parallel sind.

Satz: Der Schnittwinkel der Ebenen entspricht dem Schnittwinkel der Normalenvektoren*.



Frage: Wie untersucht man, ob sich Ebenen senkrecht schneiden?

Beispiel:

$\varepsilon_1: 4x + 2y - z = 4$

$\varepsilon_2: x - 2y + 3z = 26$

$$\cos\gamma = \frac{\left|\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{14}} = \left|\frac{-3}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{14}}\right|$$

$$\underline{\underline{\gamma = 79,9^\circ}}$$

*Hinweis: Wie kann man eigentlich die Schnittgerade berechnen?

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\-10\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-\frac{2}{5}\\\frac{13}{10}\\1\end{pmatrix}$$

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\-10\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-4\\13\\10\end{pmatrix}$$