LB: Integralrechnung

Hinweis: Die Aufgaben sind hilfsmittelfrei zu lösen.

Aufgabe 1

Berechnen Sie jeweils eine Stammfunktion.

a) $F_1(x)=\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{6}x^2$

$F_2(x)=-\frac{1}{4x}-\frac{1}{3}\ln|x|$

$F_3(x)=-5\cdot\cos x$

$F_4(x)=5x+\sin x+\pi$

$F_5(x)=\frac{1}{3}e^x-\frac{1}{4}x$

b) $G_1(x)=2\cdot\sqrt{x^3}$

$G_2(x)=\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{x^4}$

$G_3(y)=2\cdot\sqrt{y}$

$G_4(a)=\frac{1}{3}a^3+a^2+a$

$G_5(c)=a\cdot b\cdot\ln|c|$

Aufgabe 2

Berechnen Sie die 4. und die allgemeine Obersumme O_n der Funktion $f(x)=x^3$ im Intervall $[0;1]$. Berechnen Sie den Grenzwert der Obersummen O_n und interpretieren Sie das Ergebnis.

$$O_4=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^3+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{4}\right)^3$$
$$=\frac{100}{256}$$

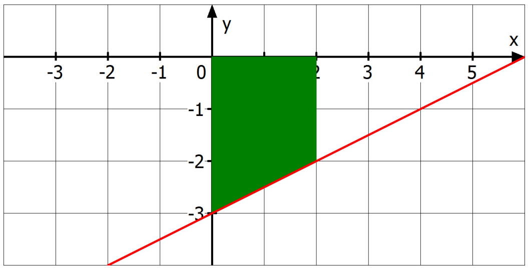
$$O_n=\frac{1}{n}\left[f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(2\cdot\frac{1}{n}\right)+\ldots+f\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)\right]$$
$$O_n=\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3+\left(2\cdot\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)^3\right]$$
$$=\frac{1}{n^4}[1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3]$$
$$=\frac{1}{n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$$
$$\lim_{n\to\infty}O_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n^2+2n+1}{4n^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}\right]$$
$$=\frac{1}{4}$$

Interpretation: $\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}$

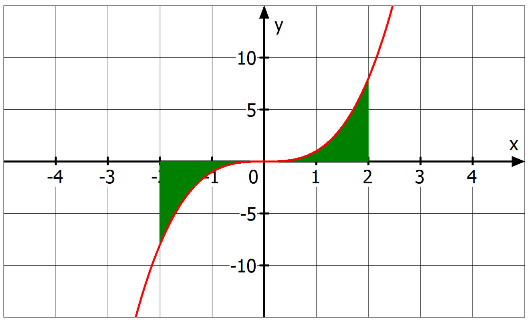
Aufgabe 3

Zeichnen Sie jeweils die dazugehörige Fläche und vergleichen Sie den Wert des bestimmten Integrals mit dem Inhalt der Fläche.

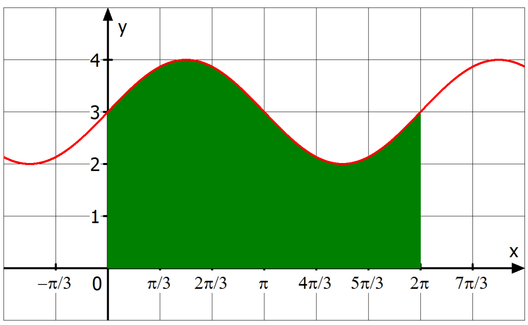
a) $\int_0^2(\frac{1}{2}x-3)dx=-5$ $\quad A=5$



b) $\int_{-2}^{2} x^3 dx = 0 \qquad A = 8$



c) $\int_{0}^{2\pi} (\sin x + 3) dx \ = \ A \ = \ 6\pi$



Aufgabe 4

Entscheiden Sie, ob die bestimmten Integrale existieren. Begründen Sie.

a) $\int_{5}^{5} (e^x + 1) dx = 0$ b) $\int_{-3}^{4} \frac{1}{x} dx = \text{n.d.}$ c) $\int_{0}^{1000} \text{int}(x) dx = 499500$

Das erste Integral existiert. Es hat den Wert 0, da die Integrationsgrenzen gleich sind.

Das zweite Integral existiert nicht. Die Funktion ist im Intervall nicht vollständig definiert (Polstelle).

Das dritte Integral existiert, da die Funktion monoton steigend ist.

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktion f mit der Funktionsgleichung $g(x) = \frac{2}{x^2} + 1$.

Geben Sie das unbestimmte Integral an.

$$\int \left(\frac{2}{x^2} + 1\right) dx \ = \ -\frac{2}{x} + x + c$$

Ermitteln Sie die Stammfunktion von g, die durch den Punkt $P(-2 \mid 4)$ verläuft.

$$F(x) = -\frac{2}{x} + x + c$$

$$4 = -\frac{2}{-2} - 2 + c$$

$$4 = -1 + c$$

$$c = 5$$

$$F(x) = \underline{\underline{-\tfrac{2}{x} + x + 5}}$$

Aufgabe 6

Gegeben ist die folgende Integralgleichung.

$$\int_{-2}^{k} x^2 dx = 24$$

Berechnen Sie den Wert k.

$$\int_{-2}^{k} x^2 dx = \frac{k^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3}$$

$$= \frac{k^3}{3} + \frac{8}{3} = 24$$

$$k^3 + 8 = 72$$

$$k^3 = 64$$

$$\underline{\underline{k = 4}}$$