Lösungen

hilfsmittelfreier Teil

1. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ sind die beiden Punkte $A_a(a \mid 2 \mid 0)$ und $B_a(2 \mid 0 \mid a)$ gegeben.

   Welcher Punkt liegt auf der Strecke $\overline{A_aB_a}$?

   ☐ $C_a(\frac{a}{2} \mid 1 \mid \frac{a}{2})$ ☐ $C_a(2-a \mid -2 \mid a)$ ☐ $C_a(a+2 \mid 2 \mid a)$ ☒ $C_a(\frac{a}{2}+1 \mid 1 \mid \frac{a}{2})$

2. Beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene E mit $E: 2x+7z=14$.

   ☐ Die Ebene E ist parallel zur x-z-Koordinatenebene.
   ☐ Die Ebene E enthält die y-Achse.
   ☐ Die Ebene E verläuft senkrecht zur y-Achse.
   ☒ Die Ebene E verläuft parallel zur y-Achse.
   ☐ Die Ebene E verläuft durch den Punkt $P(7 \mid 0 \mid 2)$.

3. Zwei Flächendiagonalen eines Würfels, die in einem Eckpunkt aufeinandertreffen schließen einen Winkel α ein. Es gilt:

   ☐ $\alpha = 30°$ ☐ $\alpha = 45°$ ☒ $\alpha = 60°$ ☐ $\alpha = 90°$ ☐ $\alpha = 120°$

4. Gegeben sind die Ebenen $\varepsilon: 2x+3y+4z=6$ und $\eta: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   Weisen Sie nach, dass sich die beiden Ebenen senkrecht schneiden.

$$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n_1} \circ \vec{n_2} = 10 - 6 - 4 = 0 \Rightarrow \varepsilon \perp \eta$$

5. Die Ebene E mit $E: 2x - y + z = 5$ und die Gerade h mit der Gleichung

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$ besitzen einen gemeinsamen Punkt.

a) Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes.

$$\begin{aligned} 2(2+t) - 2 + (-4+5t) &= 5 \\ 4 + 2t - 2 - 4 + 5t &= 5 \\ 7t &= 7 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{D(3 \mid 2 \mid 1)}}$

b) Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P(-4 \mid 0 \mid -4)$ von der Ebene E.

$$d = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0-(-4) \\ 0-0 \\ 5-(-4) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{4+1+1}} = \frac{8+9}{\sqrt{6}} = \frac{17}{\sqrt{6}}$$

c) Beschreiben Sie die besondere Lage der Gerade h.

Die Gerade liegt in der Ebene y = 2 und ist damit parallel zur x-z-Koordinatenebene.

Lösungen

Aufgabe 6:

a) Basiswinkel im Dreieck ACS: $\alpha = \frac{180^\circ - 70{,}53^\circ}{2} = \underline{54{,}735^\circ}$

Basis: $\overline{AC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{128}$

Höhe des Dreiecks: $h = \frac{\sqrt{128}}{2} \cdot \tan 54{,}735^\circ = \underline{\underline{7{,}9998}}$

Die Dachspitze besitzt die Koordinaten: $S(0 \mid 0 \mid 15)$.

b) Untersuchen Sie, ob die Dreiecksfläche ABS parallel zur unteren Dachfläche IKFE verläuft.

GTR: Abitur2017: Geometrie1: Ebenen: 3 Punkte

$S(0 \mid 0 \mid 15)\ ,\ A(4 \mid -4 \mid 7)\ ,\ B(4 \mid 4 \mid 7) \Rightarrow 64x + 32z = 480$

$F(4 \mid 4 \mid 3)\ ,\ I(5 \mid -5 \mid 0)\ ,\ K(5 \mid 5 \mid 0) \Rightarrow 30x + 10z = 150$

$$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n_2}$$

Die Flächen sind nicht parallel.

c)

Dreieck:

$h_s = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80}$

$A_1 = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{80} = 4 \cdot \sqrt{80}$

Trapez:

$h = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

$A_2 = \frac{8 + 10}{2} \cdot \sqrt{10} = 9 \cdot \sqrt{10}$

Gesamt:

$A = 16 \cdot \sqrt{80} + 36 \cdot \sqrt{10} = 256{,}95 m^2$

$P = 256{,}95 m^2 \cdot 215 \frac{€}{m^2} \cdot 1{,}19 = \underline{\underline{65.740{,}75€}}$

d) Ebenengleichung durch B, C und S:

$S(0 \mid 0 \mid 15)\ ,\ C(-4 \mid 4 \mid 7)\ ,\ B(4 \mid 4 \mid 7) \Rightarrow 2y + z = 15$

$$b_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Durchstoßpunkt mit Lagebeziehung: $\underline{\underline{P_1(0 \mid \frac{12}{5} \mid \frac{51}{5})}}$

Abstand zur Kante AD: $\sqrt{(\frac{12}{5} + 4)^2 + (\frac{51}{5} - 7)^2} = \sqrt{51{,}2} \approx \underline{7{,}155m}$

$$S(0 \mid 0 \mid 15)\ ,\ A(4 \mid -4 \mid 7) \quad \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Minimaler Abstand zum Punkt C: $C(-4 \mid 4 \mid 7)$

$$d(t) = \sqrt{(-t+4)^2 + (t-4)^2 + (2t+8)^2} = \sqrt{6t^2 + 16t + 96}$$

$$\text{Min}: t = -\frac{4}{3}$$

$$d_{min} = \underline{9,2376m}$$

Lotfußpunkt: $\underline{\underline{P_2(\tfrac{4}{3} \mid -\tfrac{4}{3} \mid \tfrac{37}{3})}}$

Gesamtlänge:

$$l = \sqrt{\frac{256}{5}} + \sqrt{\frac{256}{3}} = \frac{16}{\sqrt{5}} + \frac{16}{\sqrt{3}}$$

$$l = 7,1554m + 9,2376m \approx \underline{\underline{16,393m}}$$

e)

$K(5 \mid 5 \mid 0)$, $G(-4 \mid 4 \mid 3)$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{91}} \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,11 \\ 4,79 \\ 0,63 \end{pmatrix}$$

$Q(3,11 \mid 4,79 \mid 0,63)$, $M_{FG}(0 \mid 4 \mid 3)$

Abstand: $d = \overline{QM_{FG}} = 3,99m$

Also ist er insgesamt etwa 6 m gelaufen.