LB 1: Metrische Geometrie

Aufgabe S1:

Geben Sie 2 Geraden an, die sich orthogonal im Punkt $S(10 \mid 9 \mid -7)$ schneiden.

z.B. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe S2:

$$\begin{aligned} 2 - 4t &= 28 + 2s \\ -2 - t &= 18 + 2s \\ 21 + 8t &= -4 - s \\ &\;\;\ldots \\ t &= -2 \\ s &= -9 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{S(10 \mid 0 \mid 5)}}$$

$$\cos\gamma = \left| \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}}{9 \cdot 3} \right| = \frac{18}{27} = \frac{2}{3}$$

$$\underline{\underline{\gamma \approx 48{,}19^\circ}}$$

Aufgabe S3:

Die Punkte $A(-6 \mid 5 \mid 3)$, $B(-2 \mid 2 \mid 3)$ und $C(0 \mid 7 \mid 1)$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks, das Grundfläche einer Pyramide ABCS ist. Die Spitze S hat die Koordinaten $S(1 \mid 9 \mid 15)$.

a) Bestimmen Sie den Winkel, den die Kanten AB und AC einschließen.

$$\cos\gamma = \frac{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{5 \cdot \sqrt{44}} = \frac{18}{5 \cdot \sqrt{44}}$$

$$\underline{\underline{\gamma \approx 57{,}13^\circ}}$$

b) Bestimmen Sie die Neigung der Kante AS gegenüber der Grundfläche.

Ebene E durch A, B und C:

$$E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 26 \end{pmatrix}$$

$$E_1 : 3x + 4y + 13z = 41$$

Kante AS:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Schnittwinkel zwischen g und E_1:

$$\sin\gamma = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{194} \cdot \sqrt{209}} = \frac{193}{\sqrt{194} \cdot \sqrt{209}}$$

$$\underline{\underline{\gamma \approx 73{,}43^\circ}}$$

c) Bestimmen Sie die Neigung der Seitenfläche ABS gegenüber der Grundfläche.

Ebene E durch A, B und S:

$$E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 \\ -48 \\ 37 \end{pmatrix}$$

Schnittwinkel der Ebenen:

$$\cos\gamma = \frac{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -36 \\ -48 \\ 37 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{194} \cdot \sqrt{4969}} = \frac{181}{\sqrt{194} \cdot \sqrt{4969}}$$

$$\underline{\underline{\gamma \approx 79{,}38^\circ}}$$

Aufgabe S4:

In einem kartesischen Koordinatensystem ist für jedes t mit $t \in \mathbb{R} \wedge t \neq 0$ eine Gerade

mit der Gleichung $g_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$ gegeben.

Es gibt genau zwei Geraden g_{t_1} und g_{t_2}, die die $x-y-$Ebene in einem Winkel von 30° schneiden. Berechnen Sie für jede dieser Geraden eine Gleichung.

$$\sin\gamma = \left| \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{5+t^2}} \right|$$

$$\sin 30^\circ = \frac{|t|}{\sqrt{5+t^2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{|t|}{\sqrt{5+t^2}}$$

$$\text{Solve}: \underline{\underline{t_{1;2} = \pm 1,29}}$$

$$g_{1,29} : \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1,29 \end{pmatrix}$$

$$g_{-1,29} : \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1,29 \end{pmatrix}$$

$$(s \in \mathbb{R})$$