LB: Metrische Geometrie

hilfsmittelfrei: Aufgaben 1 bis 3

1. Welche Vektoren $\vec{a}$ stehen senkrecht auf dem Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$?

☐	☐	☒	☐	☒
$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -4 \end{pmatrix}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$	$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Die Punkte $A(1 \mid 0 \mid 0)$, $B(0 \mid 2 \mid 0)$, $C(0 \mid 0 \mid 3)$, $D(1 \mid -2 \mid 3)$ sind die Eckpunkte eines Parallelogramms ABCD.
   Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \underline{\underline{7FE}}$$

oder

$$A = a \cdot b \cdot \sin\gamma$$
$$A = \sqrt{5} \cdot \sqrt{13} \cdot \sin 119{,}7448813^\circ$$
$$A = 7FE$$

3. Gegeben sind die Gerade g und die Ebene E mit den Gleichungen:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}) \quad \text{und} \quad E : x - 5y + 4z = 4$$

   a) Berechnen Sie den Durchstoßpunkt.

$$\begin{aligned} 6 - 2s - 5(-4 + 10s) + 4(5 - 8s) &= 4 \\ 6 - 2s + 20 - 50s + 20 - 32s &= 4 \\ 46 - 84s &= 4 \\ 42 &= 84s \\ 0{,}5 &= s \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{D(5 \mid 1 \mid 1)}}$$

   b) Untersuchen Sie, ob sich Gerade und Ebene senkrecht schneiden.
      Der Normalenvektor der Ebene und der Richtungsvektor der Geraden sind offensichtlich parallel.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -8 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} \parallel \vec{a} \Rightarrow g \perp E$$

mit Hilfsmitteln: Aufgaben 4 und 5

4. Die Punkte $O(0 \mid 0 \mid 0)$, $P(8 \mid 8 \mid 14)$, $Q(10 \mid -8 \mid 22)$, $R(2 \mid -16 \mid 8)$ sind die Eckpunkte eines Vierecks OPQR.

a) Zeigen Sie, dass das Viereck OPQR ein Quadrat ist.

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{64+64+196} = \sqrt{324} = 18$$

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -16 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{4+256+64} = \sqrt{324} = 18$$

$$\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ -14 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{QR}\right| = \sqrt{64+64+196} = \sqrt{324} = 18$$

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 2 \\ -16 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{OR}\right| = \sqrt{4+256+64} = \sqrt{324} = 18$$

Die Seiten sind gleich lang.

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -16 \\ 8 \end{pmatrix} = 16 - 128 + 112 = 0$$

Die Winkel sind rechte Winkel.

Für $k > 0$ ist der Punkt $S_k(5+8k \mid -4-k \mid 11-4k)$ gegeben. Dieser Punkt sei für $k > 0$ die Spitze einer geraden Pyramide $OPQRS_k$. Der Neigungswinkel der Seitenflächen gegenüber der Grundfläche liege zwischen 45° und 60°.

b) Berechnen Sie unter diesen Bedingungen die Werte, die k annehmen kann.

Mittelpunkt des Quadrates:

$M(5 \mid -4 \mid 11)$

Höhenvektor:

$$\vec{h} = \overrightarrow{MS_k} = \begin{pmatrix} 5+8k \\ -4-k \\ 11-4k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8k \\ -k \\ -4k \end{pmatrix} \qquad h = \sqrt{(8k)^2 + (-k)^2 + (-4k)^2} = 9k$$

Idee: rechtwinkliges Stützdreieck in der Pyramide:

$$\tan\gamma = \frac{h}{\frac{a}{2}} = \frac{9k}{9} = k$$

$$45^\circ < \gamma < 60^\circ$$

$$\underline{\underline{1 < k < \sqrt{3}}}$$

5. Ein Skihang kann in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entsprich 10 m) beschrieben werden. Der Skihang liege in der Ebene E mit der Gleichung $E: x - y + 6z = 24$. Die horizontale Erdoberfläche wird durch die x-y-Ebene beschrieben.

   a) Ein 5 m hoher lotrechter Mast steht im Punkt $P(12 \mid 0 \mid 2)$ auf dem Hang. Ermitteln Sie den Winkel, den der Mast mit dem Skihang einschließt.

   $$m: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (0 \le s \le 0,5) \text{ und } E: x - y + 6z = 24$$

   GTR: Lagebeziehung: Gerade-Ebene

   $\gamma \approx \underline{\underline{76,73^\circ}}$

   b) Ermitteln Sie das Gefälle des Skihangs in Prozent.

   $E_2: z = 0$ und $E: x - y + 6z = 24$

   GTR: Lagebeziehung: Ebene-Ebene

   $\gamma \approx \underline{13,26^\circ}$

   $\tan\gamma \approx 0,236 \approx \underline{\underline{23,6\%}}$

   c) Durch Sonnenlicht mit der Richtung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ wird ein Schatten auf dem Hang erzeugt.

   Berechnen Sie die Länge des Schattens.

   $$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R}) \text{ und } E: x - y + 6z = 24$$

   GTR: Lagebeziehung: Ebene-Gerade

   Durchstoßpunkt: $D\left(\frac{381}{31} \mid \frac{12}{31} \mid \frac{125}{62}\right)$

   Abstand von Fußpunkt des Mastes bis zum Punkt D:

   GTR: Lagebeziehung: Punkt-Punkt

   $d \approx 0,4841$

   $\approx \underline{\underline{4,841\text{m}}}$