

Lösungsblatt: Verwenden von Parametern

Aufgabe 1: Tangentenschar

Bestimmen Sie alle Tangenten an den Graphen der Funktion $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Welche dieser Tangenten verlaufen durch den Punkt $P(\frac{4}{3} | 0)$?

$$t_a(x) = \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \cdot x + \frac{2}{a}$$

$$0 = \left(1 - \frac{1}{a^2}\right) \cdot \frac{4}{3} + \frac{2}{a}$$

$$0 = \frac{4}{3}a^2 + 2a - \frac{4}{3}$$

$$0 = a^2 + \frac{3}{2}a - 1$$

$$a_{1,2} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16}}$$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

$$a_2 = -2$$

Aufgabe 2: Normalenschar

Bestimmen Sie alle Normalen an den Graphen der Funktion $f(x) = \ln x$.

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$m = -\frac{1}{a}$$

$$B(a | \ln a)$$

$$n_a(x) = -a \cdot x + a^2 + \ln a$$

Aufgabe 3: Schnittpunktelebensinn

Die Gleichung $(2 - 3c^2)x + (4c - 3)y + (c^2 + 2c)z = 19 - 8c$ stellt eine Ebenenschar dar.

Weisen Sie nach, dass alle Ebenen durch einen Punkt verlaufen.

$$\varepsilon_{-1} : -x - 7y - z = 27$$

$$\varepsilon_0 : 2x - 3y + 0z = 19$$

$$\varepsilon_1 : -x + y + 3z = 11$$

Der Schnittpunkt heißt $S(2 | -5 | 6)$.

Nachweis:

$$(2 - 3c^2) \cdot 2 + (4c - 3) \cdot (-5) + (c^2 + 2c) \cdot 6 = 19 - 8c$$

$$4 - 6c^2 - 20c + 15 + 6c^2 + 12c = 19 - 8c$$

$$19 - 8c = 19 - 8c$$

w.A.

Lösungsblatt: Verwenden von Parametern

Aufgabe 4: Geradenschar

a) Zeigen Sie, die alle Geraden paarweise windschief zueinander sind.

Die Geraden liegen in parallelen Ebenen $E_k = k$.

Die Richtungsvektoren sind keine Vielfache.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k_1 \end{pmatrix} \neq s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

b) Untersuchen Sie, ob eine Gerade durch den Punkt $P(3 \mid 0 \mid -1)$ verläuft.

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 3 = 1+t \\ 0 = 2+tk \\ -1 = k \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} t=2 \\ 0=0 \\ k=-1 \end{array}$$

Es gibt eine Gerade, und zwar:

$$g_{-1}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Aufgabe 5: Geradenschar

a) Zeigen Sie, dass sich alle Geraden schneiden.

Alle Geraden verlaufen durch den Punkt $S(1 \mid 2 \mid 3)$.

b) Untersuchen Sie, welche Geraden sich orthogonal schneiden.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 1+4+a_1a_2=0 \Rightarrow a_1 \cdot a_2 = -5$$

c) Untersuchen Sie, welche Geraden einen Winkel von 45° mit der x-y-Koordinatenebene einschließen.

$$\sin 45^\circ = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ a \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{5+a^2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{|a|}{\sqrt{5+a^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$\underline{\underline{a = \pm \sqrt{5}}}$$