Lösungen

4) Uneigentlich

Für $b > 0$ schließen der Graph der Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x^2}$, die Geraden $x = 1$ und $x = b$ sowie die Abszissenachse eine Fläche ein.

a) Skizzieren Sie die Fläche für $b = 3$ und ermitteln Sie den Flächeninhalt.

Die Skizze müsste klar sein.

$$A = \int_1^3 \frac{2}{x^2}dx = \frac{4}{3}FE$$

b) Untersuchen Sie den Flächeninhalt für b gegen unendlich.

$$A(b) = \int_1^b \frac{2}{x^2}dx = \left[-\frac{2}{x}\right]_1^b = \left(-\frac{2}{b}\right) - (-2)$$

$$= 2 - \frac{2}{b}$$

$$\lim_{b \to +\infty} A(b) = 2 - 0 = 2$$

Lösungen

3) Tangenten- und Normalenschar

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \cdot e^x$

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentenschar.

Untersuchen Sie, welche Tangeten den kleinsten Anstieg besitzt.

$$f'(x) = e^x + x \cdot e^x$$
$$f'(a) = e^a + a \cdot e^a$$
$$B(a \mid a \cdot e^a)$$
$$y = (e^a + a \cdot e^a) \cdot x + n$$
$$a \cdot e^a = (e^a + a \cdot e^a) \cdot a + n$$
$$n = a \cdot e^a - (a \cdot e^a + a^2 \cdot e^a) = -a^2 \cdot e^a$$

$$\underline{\underline{y = (e^a + a \cdot e^a) \cdot x - a^2 \cdot e^a}}$$

Für $a = -2$ hat die Tangente den kleinsten Anstieg.

$$y = (e^{-2} - 2 \cdot e^{-2}) \cdot x - 4 \cdot e^{-2}$$
$$= -e^{-2}x - 4 \cdot e^{-2}$$

Untersuchen Sie, welche Tangenten durch den Punkt $P(2 \mid 0)$ verlaufen.

$$0 = (e^a + a \cdot e^a) \cdot 2 - a^2 \cdot e^a$$
$$0 = (1 + a) \cdot e^a \cdot 2 - a^2 \cdot e^a$$
$$0 = 2(1 + a) - a^2$$
$$0 = a^2 - 2a - 2$$
$$a_{1;2} = 1 \pm \sqrt{3}$$

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Normalenschar.

$$m = -\frac{1}{e^a + a \cdot e^a}$$
$$B(a \mid a \cdot e^a)$$

$$y = (e^a + a \cdot e^a) \cdot x + n$$
$$a \cdot e^a = -\frac{1}{(e^a + a \cdot e^a)} \cdot a + n$$
$$n = a \cdot e^a + \frac{a}{e^a + a \cdot e^a}$$
$$y = -\frac{1}{(e^a + a \cdot e^a)} \cdot x + a \cdot e^a + \frac{a}{e^a + a \cdot e^a}$$

Lösungen

2) Geradenschar

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist eine Gerade mit $g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-a \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 5 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$ gegeben.

a) Ermitteln Sie den Schnittpunkt Z der Geraden g_1 und g_2.

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Schnittpunkt mit GTR: Lagebeziehung Gerade-Gerade: $\underline{\underline{Z(1 \mid 2 \mid 3)}}$

b) Untersuchen Sie, ob alle Geraden g_a durch diesen Punkt Z verlaufen.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2-a \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 1 &= t \\ 2 &= 2-a+1\cdot a = 2 \\ 3 &= -2+5 = 3 \end{aligned}$$

c) Zeigen Sie, dass eine eine Gerade gibt, die senkrecht zur Geraden g_3 verläuft.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 5 \end{pmatrix} = 1 + 3a + 25 = 0$$

$$3a = -26$$

$$\underline{\underline{a = -\frac{26}{3}}}$$

Die Gerade $g_{-\frac{26}{3}}$ verläuft senkrecht zur Geraden g_3.

Lösungen

1) Spiegelung

Der Punkt $P(7 \mid 5)$ soll an der Geraden $y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ gespiegelt werden.

a) Beschreiben Sie ein rechnerisches Verfahren zur Berechnung des Bildpunktes P'.

- *Aufstellen der Normale durch den Punkt P.*
- *Berechnung des Schnittpunktes S der Geraden und der Normalen.*
- *Spiegelung des Punktes P am Schnittpunkt S.*

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Bildpunktes P'.

Normale:

$$y = \frac{2}{3}x + n$$

$$5 = \frac{2}{3} \cdot 7 + n$$

$$5 = \frac{14}{3} + n$$

$$n = \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

Schnittpunkt:

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \quad | \cdot 6$$

$$4x + 2 = -9x + 15$$

$$13x = 13$$

$$x = 1$$

$$y = \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} = 1$$

$$S(1 \mid 1)$$

Spiegelung des Punktes:

$$\vec{x} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{P'(-5 \mid -3)}}$$