

1) In der 2. Dimension

Gegeben sind die Punkte $P(2 \mid 0)$, $Q(1 \mid 7)$, $R(-4 \mid 2)$ und $S(-3 \mid -5)$.

a) Weisen Sie nach, dass das Viereck PQRS ein Rhombus ist.

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad |\vec{PQ}| = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$$

$$\vec{QR} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix} \quad |\vec{QR}| = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$$

$$\vec{RS} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} \quad |\vec{RS}| = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$$

$$\vec{SP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \quad |\vec{SP}| = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$$

Alle Seiten sind gleich lang. Also ist das Viereck ein Rhombus.

b) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Diagonalen.

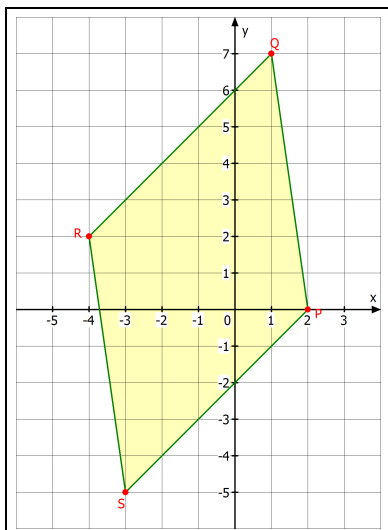
Idee: Die Diagonalen halbieren einander.

$$\vec{OS} = \frac{\vec{OP} + \vec{OR}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{S(-1 \mid 1)}}$$

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt.

Idee: Man benötigt die Länge der Diagonalen.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot e \cdot f = \frac{1}{2} \cdot |\vec{PR}| \cdot |\vec{QS}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{40} \cdot \sqrt{160} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6400} = \underline{\underline{40FE}} \end{aligned}$$



Lösungsblätter - Thema: Rechnen mit Vektoren

2) Kollinearität

Gegeben sind die Punkte A, B und C.

$$A(-1 \mid 2 \mid 3), \quad B(5 \mid 2 \mid 11), \quad C(1 \mid 9 \mid -1)$$

a) Begründen Sie, dass die Punkte A, B und C nicht kollinear sind.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{AB} \neq k \cdot \vec{AC} \quad (2. \text{ Koordinate funktioniert nicht.})$$

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D, sodass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

Idee: Käfergeburt und Vektoraddition

$$\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{D(-5 \mid 9 \mid -9)}}$$

c) Genau 2 LE vom Punkt A entfernt gibt es einen Punkt E, der sich auf der Strecke \overline{AB} befindet. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes E.

$$\vec{OE} = \vec{OA} + 2 \cdot \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}}{10} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,2 \\ 0 \\ 1,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 2 \\ 4,6 \end{pmatrix}$$

E(0,2 \mid 2 \mid 4,6)

3) Das Dreieck

Gegeben sind die Punkte D, E, F eines Dreiecks

$D(-2 \mid 0 \mid -3)$, $E(1 \mid 6 \mid 3)$ und $F(4 \mid -6 \mid 0)$.

a) Untersuchen Sie, ob das Dreieck gleichschenkelig oder gleichseitig ist.

$$\vec{DE} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \quad |\vec{DE}| = \sqrt{9+36+36} = \sqrt{81} = 9$$

$$\vec{DF} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad |\vec{DF}| = \sqrt{36+36+9} = \sqrt{81} = 9$$

$$\vec{EF} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ -3 \end{pmatrix} \quad |\vec{EF}| = \sqrt{9+144+9} = \sqrt{162}$$

$$\Rightarrow |\vec{DE}| = |\vec{DF}| \neq |\vec{EF}|$$

Das Dreieck ist leider nur gleichschenkelig.

b) Zeigen Sie, dass das Dreieck rechtwinklig ist.

Es gilt der Satz des Pythagoras:

$$|\vec{DE}|^2 + |\vec{DF}|^2 = |\vec{EF}|^2$$

$$81 + 81 = 162$$

Damit ist nachgewiesen, dass das Dreieck rechtwinklig ist.

4) Das Viereck

Gegeben sei ein Viereck ABCD mit $A(2 \mid -2 \mid 3)$, $B(1 \mid 1 \mid 1)$, $C(1 \mid 9 \mid -7)$ und $D(-3 \mid 3 \mid 3)$.

a) Untersuchen Sie, ob die Vektoren \vec{AB} , \vec{AC} und \vec{AD} linear abhängig sind.

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \vec{AD} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{AC} = 5 \cdot \vec{AB} - \frac{4}{5} \cdot \vec{AD}$$

Die Vektoren sind also linear abhängig.

b) Die Mittelpunkte der Strecken \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} und \overline{AD} sind die Eckpunkte eines weiteren Vierecks. Weisen Sie nach, dass dieses Viereck ein Parallelogramm ist.

$$\vec{OE} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -0,5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{OF} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OC} + \vec{OD}}{2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{OH} = \frac{\vec{OA} + \vec{OD}}{2} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{EF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,5 \\ -0,5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 5,5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{HG} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 5,5 \\ -5 \end{pmatrix} = \vec{EF}$$

Wenn die gegenüberliegenden Vektoren identisch sind, dann ist nachgewiesen, dass es ein Parallelogramm ist.

c)* Weisen Sie nach, dass die Aussage b) unabhängig von den Koordinaten der Punkte A, B, C und D ist.

$$\vec{OE} = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} \quad \vec{OF} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{2}$$

$$\vec{OG} = \frac{\vec{OC} + \vec{OD}}{2} \quad \vec{OH} = \frac{\vec{OA} + \vec{OD}}{2}$$

$$\vec{EF} = \frac{\vec{OB} + \vec{OC}}{2} - \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} = \frac{\vec{OC} - \vec{OA}}{2}$$

$$\vec{HG} = \frac{\vec{OC} + \vec{OD}}{2} - \frac{\vec{OA} + \vec{OD}}{2} = \frac{\vec{OC} - \vec{OA}}{2} = \vec{EF}$$