Markow-Ketten

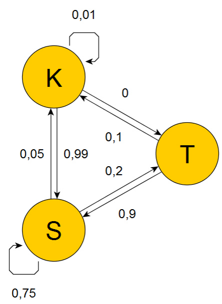
Definition: Markow-Ketten sind stochastische Prozesse, die die Beziehung zwischen Zuständen beschreiben. Die zeitlichen Abstände der Zustände sind konstant.

Beispiel 1:
Max besucht besucht die Sportschule.
Es kann aber auch sein, dass er krank ist oder im Trainingslager ist.
(Alle Zeiträume gelten wochenweise.)

Nach einer Schulwoche folgt zu 75% wieder eine Schulwoche, zu 20% ein Trainingslager und mit 5% ist er krank.
Nach einem Trainingslager ist Max mit einer Wahrscheinlichkeit von 10% krank. Ansonsten besucht er die Schule.
Nach einer Woche Krankheit ist Max mit 1% immer noch krank. An einem Trainingslager nimmt er nach seiner Krankheit aber nicht teil.

s, t, k ... Wahrscheinlichkeiten in einer Woche
s*,t*, k* ... Wahrscheinlichkeiten in der darauffolgenden Woche

$$s^* = 0,75s + 0,9t + 0,99k$$
$$t^* = 0,2s$$
$$k^* = 0,05s + 0,1t + 0,01k$$



Bemerkung: Mit Hilfe der Übergangsmatriz kann das lineares Gleichungssystem wie folgt aufgeschrieben werden.

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Beispiel 1:

$$\begin{pmatrix} 0,75 & 0,9 & 0,99 \\ 0,2 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,1 & 0,01 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ t \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^* \\ t^* \\ k^* \end{pmatrix}$$

Allgemein schreibt man das Gleichungssystem mit Hilfe einer Matrix mit einem Startvektor:

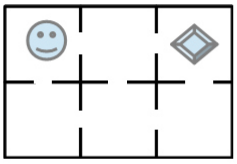
$$\overrightarrow{x_{n+1}} = A \cdot \overrightarrow{x_n} \qquad \text{mit dem Startvektor: } \overrightarrow{x_0}$$

In der 1. Woche besucht Max die Schule.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit Max in der 4. Woche die Schule besucht.

$$\overrightarrow{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{x_1} = \begin{pmatrix} 0,75 \\ 0,2 \\ 0,05 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{x_2} = \begin{pmatrix} 0,792 \\ 0,15 \\ 0,058 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{x_3} = \begin{pmatrix} 0,78642 \\ 0,1584 \\ 0,05518 \end{pmatrix}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 78,642% besucht Max in der 4. Woche die Schule.

Beispie 2:



In einem Labyrinth aus 6 Kammern soll ein Schatz gefunden werden.
Die anliegenden Kammern sind durch Türen verbunden.

Man sucht so lange, bis der Schatz gefunden wurde. Man wählt eine Tür zufällig, aber nicht die Tür, aus der man gekommen ist. Das Wechseln der Kammer erfolgt im Minutentakt.

Wir legen folgende Variablen fest:

a	b	c
d	e	f

$$a^* = \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}d$$
$$b^* = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}e$$
$$c^* = \frac{1}{3}b + c + \frac{1}{2}f$$
$$d^* = \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}e$$
$$e^* = \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}f$$
$$f^* = \frac{1}{3}e$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* \\ b^* \\ c^* \\ d^* \\ e^* \\ f^* \end{pmatrix}$$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist man nach 4 Minuten wieder am Ausgangsort?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man nach 5 Minuten den Schatz gefunden?
Wie viele Minuten benötigt man, um den Schatz mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% zu finden?

$$\vec{x_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{x_4} = \begin{pmatrix} \frac{125}{432} \\ 0 \\ \frac{19}{54} \\ 0 \\ \frac{155}{432} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{x_5} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{685}{2592} \\ \frac{19}{54} \\ \frac{685}{2592} \\ 0 \\ \frac{155}{1296} \end{pmatrix} \quad \vec{x_{20}} = \begin{pmatrix} 0,0356 \\ 0 \\ 0,9189 \\ 0 \\ 0,0454 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit einer W. von 28,94% ist er nach 4 Minuten wieder am Ausgangsort.
Mit einer W. von 35,19% hat man nach 5 Minuten den Schatz gefunden.
Man benötigt 20 Minuten.