Lösungsblatt - Lagebeziehung von Geraden

1. Untersuchung

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Die Geraden schneiden sich. $S(8 \mid 8 \mid 8)$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -21 \\ 9 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 28 \\ -12 \end{pmatrix}$

Die Geraden sind identisch.

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Die Geraden sind windschief.

d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 24 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$

Die Geraden sind echt parallel.

2. Freiheit

a) Die beiden Geraden schneiden sich rechtwinklig im Punkt $S(1 \mid 2 \mid 3)$.

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) Die beiden Geraden verlaufen parallel im Abstand von 5 LE.

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Die beiden Geraden verlaufen windschief im Abstand von 3 LE.

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) Die beiden Geraden verlaufen parallel zur x-y-Ebene und sind auch zueinander parallel.

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. Strecke

Berechnen Sie den Mittelpunkt und die Länge der Strecke s.

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}; 0 \leq t \leq 1)$$

Mittelpunkt:

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad M(10 \mid -2 \mid -1)$$

Länge der Strecke:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 13 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{36+64} = 10$$

Beschreiben Sie die besondere Lage im Raum.

Die Strecke verläuft parallel zur x-y-Koordinatenebene.

In welchen Oktanten verläuft die Strecke?

x ist immer positiv

z ist immer negativ

y kann positiv, 0 und negativ sein

$y > 0$:V. Oktant

$y = 0$: x-z-Ebene

$y < 0$: VIII. Oktant