Name des Schülers: ____________________________ 08.01.2018

1. Klausur - Grundkurs Mathematik - 6ma13 (VT) - Lösungen

Teil A

Hinweis: Es dürfen keine Hilfsmittel verwendet werden.

1. Gegeben sind die 3 Punkte $A(2 \mid 0 \mid 0)$, $B(3 \mid 2 \mid 2)$ und $C(4 \mid -2 \mid 1)$.

   a) Zeigen Sie, dass die Punkte nicht auf einer Geraden liegen. *(3BE)*

   $$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} k = 2 \\ k = -1 \\ k = 0{,}5 \end{array}$$

   Die Richtungsvektoren sind nicht parallel, also sind die Punkte nicht kollinear.

   b) Geben Sie die Gleichung einer Ebene an, in der sich die Punkte befinden. *(2BE)*

   $$\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (r, s \in \mathbb{R})$$

5 BE

2. Gegeben ist die Ebene E mit der Gleichung $E: \; 12y - 5z = 30$.

   a) Beschreiben Sie die besondere Lage der Ebene im Raum und berechnen Sie die Durchstoßpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen. *(3BE)*

   Die Ebene verläuft parallel zur x-Achse.

   Durchstoßpunkt mit der y-Achse: $D_y(0 \mid \frac{5}{2} \mid 0)$

   Durchstoßpunkt mit der z-Achse: $D_z(0 \mid 0 \mid -6)$

   b) Die Gerade g verläuft senkrecht zur Ebene E durch den Koordinatenursprung. Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an. *(2BE)*

   $$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

   c) Die Gerade h liegt gleichzeitig in der x-y-Ebene und in der Ebene E. Geben Sie eine Gleichung der Geraden h an. *(2BE)*

   $$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$$

7 BE

1. Klausur - Grundkurs Mathematik - 6ma13 (VT) - Lösungen

3. Gegeben sind die Geraden g und h mit den Gleichungen.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (r \in \mathbb{R}) \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Untersuchen Sie die Lagebeziehung der beiden Geraden. *(3BE)*

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} k &= 4 \\ k &= 3 \\ k &= 2 \end{aligned}$$

Die Richtungsvektoren sind nicht parallel.

Deshalb können die Geraden nur scheidend oder windschief sein.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$4 + r = 2 + 4s$$

$$3 + r = 5 + 3s$$

$$-2 + r = 1 + 2s$$

$$\mathrm{I} - \mathrm{II}: \; 1 = -3 + s$$

$$s = 4$$

$$\mathrm{I}: \; r = -2 + 4s = -2 + 16 = 14$$

$$\mathrm{III}: \; -2 + 13 = 1 + 2 \cdot 4$$

$$11 = 9 \text{f.A.}$$

Die Geraden sind windschief.

1. Klausur - Grundkurs Mathematik - 6ma13 (VT) - Lösungen

4) Die Rote Pyramide des Snofru

a) Die Pyramide ist eine gerade Pyramide mit quadratischer Grundfläche.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D.

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4,4-17,6 \\ 30,8-13,2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13,2 \\ 17,7 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{D(-13,2 \mid 17,7 \mid 0)}}$$

Begründen Sie, dass für die Koordinaten der Spitze S gilt: $x_S = 2,2$ und $y_S = 15,4$.

M sei der Mittelpunkt der Grundfläche.
Die x- und y-Koordinaten von S stimmen mit denen von M überein.

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4,4 \\ 30,8 \\ 0 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 2,2 \\ 15,4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

b) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide in m³. *(3BE)*

$$a = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{17,6^2 + 13,2^2} = 22$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 220\text{m} \cdot 220\text{m} \cdot 110\text{m} = \underline{\underline{1.774.667\text{m}^3}}$$

c) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P. *(3BE)*

Ebene E durch A, B und S: $145,2x - 193,6y + 242z = 0$

Gerade von M senkrecht zur Ebene: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2,2 \\ 15,4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 145,2 \\ -193,6 \\ 242 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$

Durchstoßpunkt von E und g: $\underline{\underline{P(5,5 \mid 11 \mid 5,5)}}$

d) Ermitteln Sie die Koordinaten eines der Punkte der Deckfläche. *(3BE)*

Ebene, 100 m über der x-y-Ebene: $z = 10$

Gerade von A nach S: $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2,2 \\ 15,4 \\ 11 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$

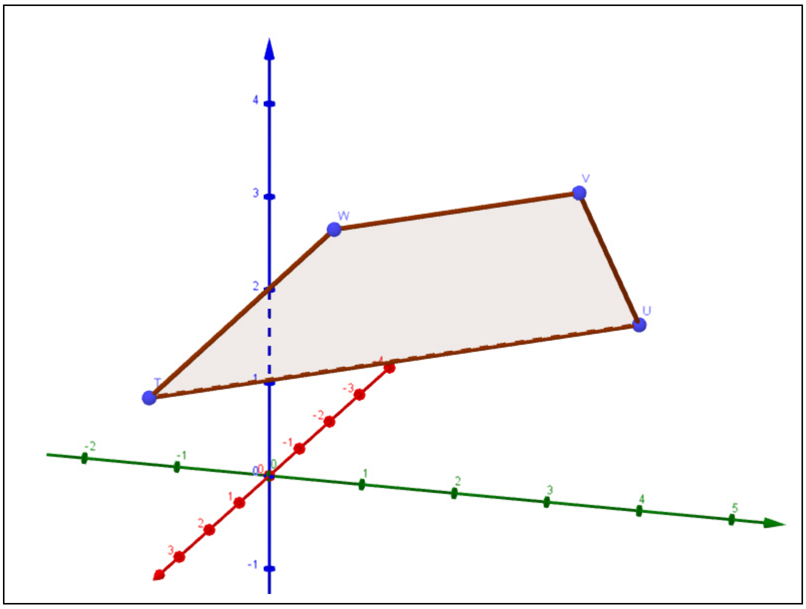
Durchstoßpunkt der Ebene und s: $\underline{\underline{E(2 \mid 14 \mid 10)}}$

1. Klausur - Grundkurs Mathematik - 6ma13 (VT) - Lösungen

5) Das Viereck

Gegeben ist ein Viereck mit den Punkte $T(4 \mid 0 \mid 2)$, $U(0 \mid 4 \mid 2)$, $V(2 \mid 4 \mid 4)$ und $W(4 \mid 2 \mid 4)$.

a) Zeichnen Sie das Viereck in einem kartesischen Koordinatensystem. *(4BE)*



b) Weisen Sie nach, dass es sich um ein gleichschenkliges Trapez handelt. *(4BE)*

$$\overrightarrow{TU} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{WV} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

TU und VW sind parallel, also ist es ein Trapez.

$$\overrightarrow{UV} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{TW} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{UV}\right| = \left|\overrightarrow{TW}\right| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

Die Schenkel sind gleich lang.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes. *(3BE)*

Höhe des Trapezes: *Abstand der Mittelpunkte von TU und VW:*

$M_1(2 \mid 2 \mid 2)$ $M_2(3 \mid 3 \mid 4)$

$h = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$

$A = \frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{\sqrt{32}+\sqrt{8}}{2} \cdot \sqrt{6} = \underline{\underline{10,39FE}}$