Geraden

Punktprobe

Wie kann man überprüfen, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt?

Bemerkung: Man testet, ob es einen Wert t gibt, sodass für den Variablenvektor die Koordinaten des Punktes herauskommen.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad A(-7 \mid 10 \mid -1), \quad B(-2 \mid 0 \mid 3), \quad C_a(3 \mid -10 \mid a)$$

Diese Frage führt jeweils auf ein einfaches LGS mit einer Variablen.

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{I}: -7 = -3 + 2t \Rightarrow t = -2$$

$$\text{II}: 10 = 2 - 4t \Rightarrow t = -2$$

$$\text{III}: -1 = \frac{1}{2} + 5t \Rightarrow t = -0,3$$

$$\underline{\underline{A \notin g}}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{I}: -2 = -3 + 2t \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{II}: 0 = 2 - 4t \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{III}: 3 = \frac{1}{2} + 5t \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{B \in g}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{I}: 3 = -3 + 2t \Rightarrow t = 3$$

$$\text{II}: -10 = 2 - 4t \Rightarrow t = 3$$

$$\text{III}: a = \frac{1}{2} + 5t \Rightarrow a = 15,5$$

$$a = \frac{31}{2} \Rightarrow \underline{\underline{C \in g}}$$

$$a \neq \frac{31}{2} \Rightarrow \underline{\underline{C \notin g}}$$

Geraden

Besondere Lage im Raum

Geben Sie Geradengleichungen für die 3 Koordinatenachsen an.

$$x-\text{Achse}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y-\text{Achse}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z-\text{Achse}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Ist der Stützvektor der Nullvektor, dann kann man ihn also weglassen.

Aufgabe: Beschreiben Sie die besondere Lage der Geraden im Raum.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

g verläuft parallel zur z-Achse
h verläuft innerhalb der y-z-Ebene
i verläuft parallel zur x-z-Ebene

Strecken und Strahlen (Halbgeraden)

Information: Man kann den Parameter auch einseitig oder zweiseitig einschränken, dann beschreibt die Punktmenge einen Strahl bzw. eine Strecke.

Beispiel (Strecke):

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}, 0 \le t \le 1)$$

Diese Gleichung beschreibt eine Strecke vom Punkt A(1;2;3) bis zum Punkt B(2;3;4).
Frage: Wie überprüft man, ob ein Punkt auf einer Strecke liegt?

Beispiel (Strahl):

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}, t \ge 0)$$

Diese Gleichung beschreibt einen Strahl mit dem Anfangspunkt Punkt A(1;2;3).