Geraden

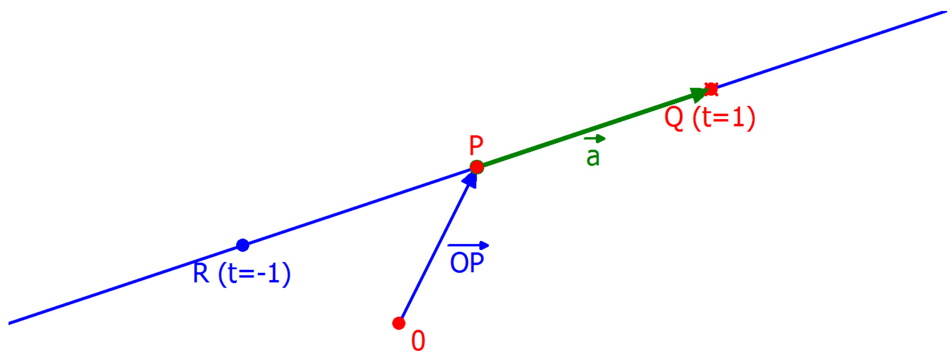
Zielorientierung: Ein Flugzeug befindet sich 11:35 Uhr im Punkt $P(3{,}000 \mid 4{,}000 \mid 9{,}995)$. Um genau 11:40 befindet es sich im Punkt $Q(46{,}200 \mid 65{,}800 \mid 10{,}150)$.
Wann erreicht es die maximale Flughöhe von 11 km?
Wie schnell ist das Flugzeug?

Zunächst wollen wir klären, wie man Geraden im Raum beschreibt. Dazu benötigt man einen festen Punkt und eine Richtung.

Definition: Gegeben sei ein Punkt P mit dem Ortsvektor $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ und ein Richtungsvektor $\vec{a} \neq \vec{o}$. Dann beschreibt die Gleichung

$$\boxed{\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{a}} \quad \text{bzw.} \quad \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{a} \quad (t \in \mathbb{R})$$

eine Gerade g mit dem Punkt P und dem Richtungsvektor $\vec{a}$.



Bemerkungen:

- Für jeden Wert des freien Parameters t ergibt sich ein Ortsvektor, der einem Punkt auf dieser Geraden entspricht.
- Der Vektor $\vec{p}$ wird oft als Stützvektor bezeichnet.
- Diese Form der Geradengleichung nennt man Punktrichtungsgleichung. Sie ist eine vektorielle Gleichung bzw. eine Parametergleichung.
- Der sogenannte Variablenvektor kann auch so geschrieben werden:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Geraden

Beispiel:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Auf dieser Geraden liegen beispielsweise die Punkte ...

$P_0(3 \mid 1 \mid 0)$ für $t = 0$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$P_1(4 \mid 0 \mid 6)$ für $t = 1$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$P_2(5 \mid -1 \mid 12)$ für $t = 2$

$P_{10}(13 \mid -9 \mid 60)$ für $t = 10$

Bemerkung:

- *Die Geradengleichung selbst ist nicht eindeutig.*
- *Man kann für den Stützvektor einen anderen Punkt benutzen, der aber auf der Geraden liegen muss.*
- *Den Richtungsvektor kann man vervielfachen, ohne die Gerade zu ändern.*

Aufgabe: Schreiben Sie die Geradengleichung um, ohne die Gerade zu verändern.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Folgende Geradengleichungen beschreiben dieselbe Gerade.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} , \qquad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ -40 \end{pmatrix}$$