Lösungen: Anwendungen - Lagebeziehung von Geraden und Ebenen

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Ebene E mit $E: x - 2y + 2z = 10$.

a) Die Gerade s schneidet die Ebene E senkrecht. Der Durchtoßpunkt liegt auf der z-Achse. Bestimmen Sie die Geradengleichung von s.

Idee: Der Normalenvektor steht senkrecht auf der Ebene.

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

b) Die Gerade h verläuft parallel zur Ebene E im Abstand von 6 LE.
Bestimmen Sie die Geradengleichung von h.

Idee: Man bestimmt 2 Punkte, die 6 LE von der Ebene entfernt sind und konstruiert daraus eine Gerade.

Für die Länge des Normalenvektors gilt:

$$\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

Der Normalenvektor wird verdoppelt und an 2 Punkte der Ebene geheftet.

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Aus diesen 2 Punkten wird eine Gerade konstruiert.

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

c) Die Gerade i verläuft innerhalb der Ebene E.
Bestimmen Sie die Geradengleichung von i.

Idee: Man bestimmt 2 Punkte, die in der Ebene liegen und konstruiert daraus eine Gerade.

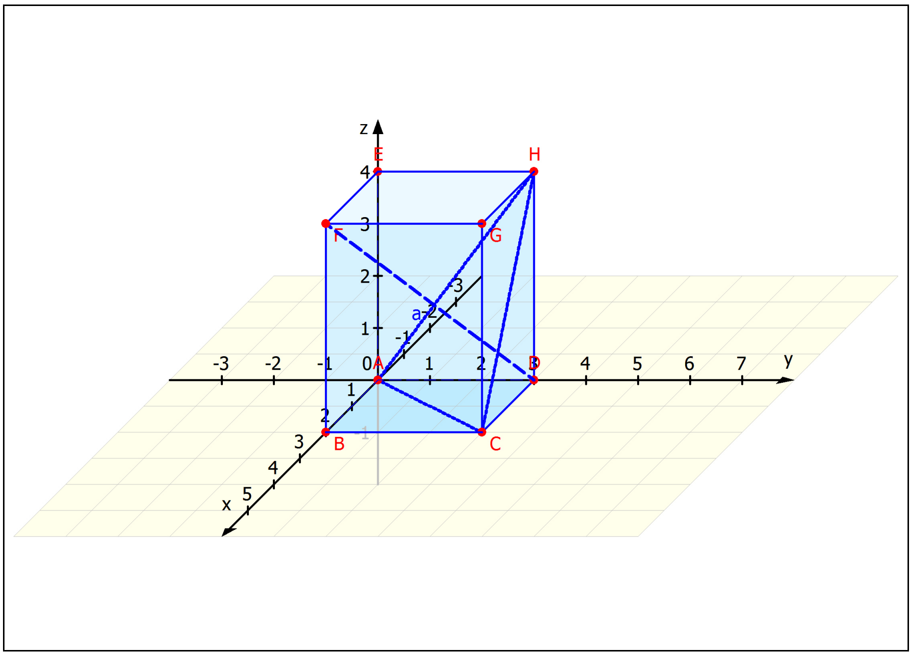
z.B. $A(10 \mid 0 \mid 0)$, $B(0 \mid -5 \mid 0)$

$$i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Aufgabe 2:

In einem kartesischen Koordinatensystem ist ein Quader ABCDEFGH mit den Punkten $A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(2 \mid 0 \mid 0)$, $D(0 \mid 3 \mid 0)$ und $E(0 \mid 0 \mid 4)$ gegeben. Weiterhin ist die Gerade g durch die Punkte F und D festgelegt. Die Ebene ε enthält die Punkte A, C und H.

a) Stellen Sie den Sachverhalt graphisch dar.



b) Ermitteln Sie den Durchstoßpunkt der Geraden g mit der Ebene ε und untersuchen Sie, ob die Gerade g die Ebene ε senkrecht schneidet.

Gerade durch $F(2 \mid 0 \mid 4)$ und $D(0 \mid 3 \mid 0)$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Ebene durch $A(0 \mid 0 \mid 0)$, $C(2 \mid 3 \mid 0)$ und $D(0 \mid 3 \mid 4)$

$$\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (r, s \in \mathbb{R})$$

Umwandlung in die Koordinatenform:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \varepsilon: 12x - 8y + 6z = 0 \Rightarrow \varepsilon: 6x - 4y + 3z = 0$$

Durchstoßpunkt mit der Geraden g:

$$6(2-2t) - 4 \cdot 3t + 3(4-4t) = 0$$
$$12 - 12t - 12t + 12 - 12t = 0$$
$$24 = 36t$$
$$\frac{2}{3} = t$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{S\left(\frac{2}{3} \mid 2 \mid \frac{4}{3}\right)}}$$

c) Die Ebene ε zerlegt den Quader in zwei Teilkörper. Berechnen Sie das Verhältnis der Volumina der beiden Teilkörper.

Volumen des Quaders: $V = 2 \cdot 3 \cdot 4 = \underline{24VE}$

Volumen der Pyramide ACDE: $V_1 = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4 = \underline{4VE}$

Volumen des Restkörpers: $V_2 = V - V_1 = \underline{20VE}$

Das Verhältnis der Teilkörper beträgt 1:5.

Aufgabe 3:

Ein ebener Skihang hat die Form eines Vierecks und kann in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entspricht 100 m) dargestellt werden. Das Viereck wird durch die Eckpunkte $A(1 \mid 0 \mid 0)$, $B(0 \mid 1 \mid 0)$, $C(-7 \mid -3 \mid 2)$ und $D(-3 \mid -7 \mid 2)$ begrenzt.

a) Untersuchen Sie die Art des Vierecks. Ermitteln Sie den Flächeninhalt des Skihangs. Berechnen Sie, welchen maximalen Weg ein Skifahrer auf dem Hang zurücklegen kann, ohne die Richtung zu ändern.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2} \qquad\qquad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{CD}\right| = \sqrt{32}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{69} \qquad\qquad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{69}$$

Die Seiten AB und CD sind parallel.

Die Seiten BC und AD sind gleich lang.

Es handelt sich um ein gleichschenkliges Trapez.

Der maximale Weg entspricht offensichtlich einer Diagonalen.

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{77} \qquad \sqrt{77} \cdot 100\text{m} \approx \underline{\underline{877{,}5\text{m}}}$$

Der maximal Weg beträgt etwa 877,5 m.

b) Ein Lift wird durch 50 m hohe gerade lotrechte Stützen gehalten. Eine solche Stütze befindet sich im Punkt $P(-3 \mid -1{,}5 \mid 1)$. Zu einem bestimmten Zeitpunkt fällt Sonnenlicht in der Richtung $\vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ auf den Skihang. Dabei entsteht ein Schatten der Stütze. Ermitteln Sie die Länge des Schattens.

Zunächst benötigt man die Gleichung der Ebene, die den Hang beschreibt.
Ebene durch $A(1 \mid 0 \mid 0)$, $B(0 \mid 1 \mid 0)$ und $C(-7 \mid -3 \mid 2)$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (r, s \in \mathbb{R})$$

Umwandlung in die Koordinatenform:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 11 \end{pmatrix} \qquad E: 2x + 2y + 11z = d \;\Rightarrow\; E: 2x + 2y + 11z = 2$$

Geradengleichung der oberen Schattenbegrenzung (Spitze):

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1,5 \\ 1,5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Durchstoßpunkt von Ebene und Gerade:
$\underline{S(-3,58 \mid -2,08 \mid 1,21)}$

Abstand vom Fußpunkt der Stütze:
$d = 0,847 \approx \underline{\underline{84,7\,\text{m}}}$