LB: Vorbereitung auf die Klausur (mit Hilfsmitteln)

1) Pünktlichkeit

Ein Schulleiter behauptet, dass mindestens 90% seiner Schüler pünktlich sind. Diese Vermutung soll an 50 Schülern überprüft werden.

a) Formulieren Sie die Nullhypothese und die Gegenhypothese. Nennen Sie die Art des Tests, der verwendet wird.

$$H_0 : p \geq 0,9$$

$$H_1 : p < 0,9$$

Es wird ein linksseitiger Test verwendet.

b) Geben Sie eine Entscheidungsregel für eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 5% an. Wie entscheidet man, wenn 6 Schüler zu spät kommen?

Kommen weniger als 41 Schüler pünktlich, dann wird die Behauptung des Schulleiters abgelehnt.

X beschreibt die Anzahl der pünktlichen Schüler: $X \sim B(50; 0,9)$

$$K = \{0, ..., 40\}$$

$$\overline{K} = \{41, ..., 50\}$$

Es kommen 44 Schüler pünktlich, also lehnt man die Nullhypothese nicht ab.

c) Wir nehmen an, dass in Wirklichkeit nur 85% der Schüler pünktlich sind. Berechnen Sie für diesen Fall den Fehler 2. Art.

$$Y \sim B(50; 0,85)$$

$$P(41 \leq Y \leq 50) = \underline{\underline{0,7911}} = \beta$$

2) Fleiß

Eine Gruppe von 130 Studenten muss an einer Prüfung teilnehmen. 80 Studenten sind fleißig und bereiten sich intensiv auf die Prüfung vor. Insgesamt bestehen 92 Studenten die Prüfung. Von den fleißigen Studenten bestehen 5 die Prüfung nicht.

a) Untersuchen Sie, ob die Merkmale „Fleiß“ und „Bestehen der Prüfung“ stochastisch abhängig sind.

$$P(F) = \frac{80}{130} = \frac{8}{13}$$

$$P(B) = \frac{92}{130} = \frac{46}{65}$$

$$P(F) \cdot P(B) = 0,4355$$

$$P(B \cap F) = \frac{75}{80} = \frac{15}{16} = 0,9375 \neq P(F) \cdot P(B)$$

Der Merkmale sind stochastisch abhängig.

b) Für die Studenten, die die Prüfung nicht bestehen, wird eine zweite Prüfung angesetzt. Berechnen Sie die Bestehensquote für die zweite Prüfung, wenn die Gesamtbestehensquote durch die zweite Prüfung auf 80% steigt.

$$0,8 \cdot 130 = 104$$

$$104 - 92 = 12$$

Es bestehen also 12 Studenten die Nachprüfung.

$p = \frac{12}{38} \approx \underline{\underline{0,3158}}$

Die Bestehensquote für die zweite Prüfung beträgt demnach 31,58%.

3) Das Känguru der Mathematik

Der Känguruwettbewerb ist ein Multiple-Choice-Wettbewerb mit vielfältigen Aufgaben zum Knobeln, zum Grübeln, zum Rechnen und zum Schätzen. Am Känguruwettbewerb im Sportgymnasium hatten sich zunächst 211 Schüler angemeldet. Jeder Schüler fehlt durch Krankheit mit einer Wahrscheinlichkeit von 4,5 %. Unabhängig davon fehlt jeder Schüler aufgrund der sportlichen Verpflichtung mit einer Wahrscheinlichkeit von 7,2 %.

a) Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein angemeldeter Schüler beim Känguruwettbwerb fehlen wird.

	S	$\overline{S}$	
K			0,045
$\overline{K}$		0,88624	0,955
	0,072	0,928	

$$P(K \cup S) = 1 - 0,88624 = 0,11376$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 11,376% wird ein Schüler fehlen.

b) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der mindestens 190 Schüler am Känguruwettbewerb teilnehmen.

X ... Anzahl der Teilnehmer

$$X \sim B(211; 0,88624)$$

$$P(X \geq 190) = \underline{\underline{0,3006}}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 30,06% sind mindestens 190 Schüler anwesend.

4) Backfreude

Die Bäckerei *Backfreude* hat Aktionswoche für Roggen-, Sesam- und Mohnbrötchen. Es werden Aktionstüten mit jeweils 4 Brötchen zum Gesamtpreis von 1,23 € angeboten. Allerdings sind die Brötchen in den Tüten zufällig verteilt. Die Roggenbrötchen kosten einzeln 0,50 €. Die Sesambrötchen und die Mohnbrötchen kosten einzeln 0,35 €.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der sich ausschließlich Brötchen einer Sorte in einer Aktionstüte befinden.

$P(A) = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{3^4} = \frac{1}{27}$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der sich Brötchen aller Sorten in einer Aktionstüte befinden.

(SMRR) $\frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$

(SRMM) $\frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$

(MRSS) $\frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$

Gesamt: 36

$P(B) = \frac{36}{81} = \frac{4}{9}$

b) Herr Stark mag Mohnbrötchen, die einzeln 0,35 € kosten. Er kauft eine Aktionstüte. Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit wenigstens zwei Mohnbrötchen in der Tüte sind.

$$X \sim B\left(4; \frac{1}{3}\right)$$

$$P(X \geq 2) = \frac{11}{27}$$

Berechnen Sie, wie viele Tüten Herr Stark mindestens kaufen müsste, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,9 % mindestens ein Mohnbrötchen erhält.

$$X \sim B\left(n; \frac{1}{3}\right)$$

$$P(X \geq 1) \geq 0,999$$

$$P(X = 0) \leq 0,001$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 0,001$$

$$n \geq 17,03$$

Herr Stark muss mindestens 5 Tüten kaufen. 4 Tüten reichen nicht aus.
(Vielleicht sollte er einfach ein Mohnbrötchen kaufen.)

c) Berechnen Sie, welche Einsparung man beim Kauf einer Aktionstüte im Vergleich zu den Einzelpreisen erwarten kann.

$$\frac{1}{3} \cdot 0,50€ + \frac{2}{3} \cdot 0,35€ = 0,40€$$

$$0,40€ \cdot 4 = 1,60€$$

$$1,60€ - 1,23€ = 0,37€$$

Es ist eine Einsparung von 0,37 € zu erwarten.