

Stochastik - Lösungsblatt

1) Spardose

In einer Spardose befinden sich 8 Goldmünzen und 2 Silbermünzen. Es werden nacheinander 3 Münzen ohne Zurücklegen entnommen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A = „Genau 2 Münzen sind gleich.“

B = „Die ersten beiden Münzen sind gleich.“

C = „Die 3. Münze ist gold.“

D = $A \cap C$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{8}{15}$$

$$P(B) = \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{9} + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{29}{45}$$

$$P(C) = P(GGG) + P(GSG) + P(SGG) + P(SSG) = 0,8$$

$$P(D) = P(GSG) + P(SGG) + P(SSG) = \frac{1}{3}$$

2) Spät oder zeitig

Frau Zeitig benutzt in 85% aller Fälle das Fahrrad, um an ihren Arbeitsplatz zu gelangen. Ansonsten fährt sie mit der Straßenbahn.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 81% kommt Frau Zeitig mit dem Fahrrad zur Arbeit und ist auch pünktlich.

Insgesamt kommt sie mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% pünktlich an ihrem Arbeitsplatz an.

a) Begründen Sie, dass die Unpünktlichkeit und die Wahl der Verkehrsmittel stochastisch abhängig sind.

$$P(F) \cdot P(P) \neq P(F \cap P)$$

$$0,85 \cdot 0,95 \neq 0,81$$

$$0,8075 \neq 0,81$$

Die Ereignisse F und P sind stochastisch abhängig.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Frau Zeitig mit der Bahn zur Arbeit kommt und unpünktlich ist.

$$P(B \cap U) = \underline{\underline{0,01}}$$

c) Frau Zeitig kommt pünktlich an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat sie das Fahrrad benutzt?

$$P_P(F) = \frac{0,81}{0,95} \approx \underline{\underline{0,8526}}$$

3) Basketball

Die Basketballer Steven und Marvin spielen zur Aufwärmung verschiedene Freiwurfspiele. Steven trifft den Korb in allen Spielen jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 80%. Marvin trifft den Korb jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 60%.

In einem Freiwurfspiel werfen die Spieler jeweils abwechselnd und Steven beginnt. Der Spieler, der zuerst daneben wirft, hat sofort verloren und der andere gewonnen.

Sollte nach insgesamt 4 Würfungen immer noch kein Sieger feststehen, dann geht der Wettbewerb unentschieden aus.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A = „Das Spiel endet unentschieden.“

B = „Steven gewinnt das Spiel.“

C = „Marvin gewinnt das Spiel.“

D = $B \cup C$

$$P(A) = 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = \underline{\underline{0,2304}}$$

$$P(B) = 0,8 \cdot 0,4 + 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,8 \cdot 0,4 = \underline{\underline{0,4736}}$$

$$P(C) = 0,2 + 0,8 \cdot 0,6 \cdot 0,2 = \underline{\underline{0,296}}$$

$$P(D) = 1 - 0,2304 = \underline{\underline{0,7696}}$$

4) Lieblingessen

Max hat nur 3 Lieblingsessen: Nudeln, Pizza und Döner. Dennoch kann jedes der 3 Essen der augenblickliche Spitzenreiter sein.

Heute sind es gerade Nudeln. Das kann morgen aber schon wieder anders aussehen.

Max hat seine Essgewohnheiten studiert und folgendes festgestellt.

Wenn Nudeln seine Lieblingsspeise ist, dann sind sie es am darauffolgenden Tag nicht.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% ist es dann die Pizza, ansonsten der Döner.

Wenn Pizza seine Lieblingsspeise ist, dann ist sie es am darauffolgenden Tag nicht.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% sind es dann die Nudeln, ansonsten ist es der Döner.

Wenn Döner seine Lieblingsspeise ist, dann ist er es auch am darauffolgenden Tag mit einer Wahrscheinlichkeit von 50%. Mit einer Wahrscheinlichkeit von 50% ist es nach dem Döner die Pizza. Nudeln mag er dann nicht.

a) Zeichnen Sie einen Übergangsgraphen.

Das müsste klar sein.

b) Stellen Sie die Übergangsmatrix auf.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,7 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} n_{t+1} \\ p_{t+1} \\ d_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,7 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_t \\ p_t \\ d_t \end{pmatrix}$$

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind Nudeln nach 3 Tagen seine Lieblingsspeise?

$$\begin{pmatrix} n_{t+1} \\ p_{t+1} \\ d_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,7 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_t \\ p_t \\ d_t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0,7 & 0 \\ 0,6 & 0 & 0,5 \\ 0,4 & 0,3 & 0,5 \end{pmatrix}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,14 \\ 0,442 \\ 0,418 \end{pmatrix}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 14% sind Nudeln seine Lieblingsspeise.