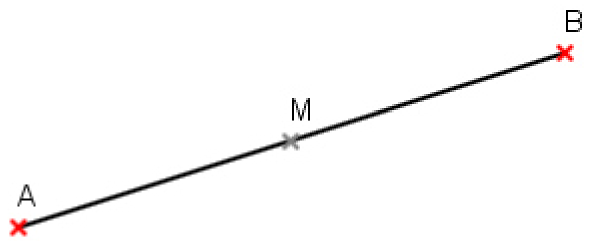
<u>Vektoren</u>

Im folgenden Abschnitt wollen wir kennlernen, wie man geometrische Objekte im Raum beschreiben. Egal, ob wir Punkte, Geraden, Ebenen oder Kugeln beschreiben wollen, für alle Objekte ist der Vektor ein nützliches (geniales) Hilfsmittel.

Eine Frage könnte beispielsweise sein, wie man den Mittelpunkt einer Strecke berechnet.



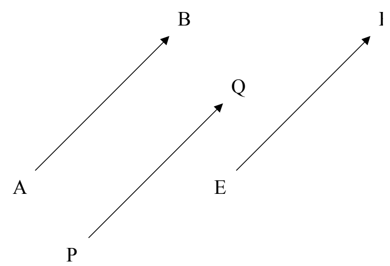
Definition: Ein Pfeil ist festgelegt durch ein Paar von Punkten. Für einen Pfeil von P nach Q schreibt man $\overrightarrow{PQ}$. Der Pfeil hat 3 Eigenschaften:

- eine Richtung,
- eine Länge oder der Betrag,
- und eine Orientierung.

Besitzen Pfeile dieselbe Richtung, dieselbe Orientierung und dieselbe Länge, dann nennt man sie parallelgleich.

Bemerkung: Die Richtungen zweier Pfeile ist gleich, wenn sie parallel sind. Sie können aber entgegengesetzt sein. Die Orientierung ist dann also nicht gleich. Man kann überhaupt nur die Orientierung von Pfeilen (und später von Vektoren) vergleichen, falls die Richtungen gleich sind.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{EF}$$



Als Sammelbegriff für die Menge aller parallelgleichen Pfeile wird die Bezeichnung Vektor verwendet. Ein Pfeil heißt Repräsentant des Vektors. Es ist auch üblich, für die Pfeile selbst Vektoren zu sagen. Damit folgt die erste wichtige Definition.

Definition: Der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ ist die Menge aller zum Pfeil $\overrightarrow{PQ}$ parallelgleichen Pfeile.

Schreibweise: Kleinbuchstaben werden ebenfalls oft verwendet $\vec{x} = \overrightarrow{PQ}$

Bemerkung: Es handelt sich also um eine ganz Klasse von Pfeilen. Man könnte des Vektor auch als identische Verschiebung aller Punkte des Raumes betrachten.

Aufgabe: Zeichnen Sie die Pyramide ABCDS mit der rechteckigen Grundfläche im Normalbild.

$A(-1 \mid 1 \mid 0)$; $B(3 \mid -1 \mid 0)$; $C(5 \mid 3 \mid 0)$; $D(x_D \mid y_D \mid 0)$; $S(2 \mid 2 \mid 5)$

a) Nennen Sie die Koordinaten des Punktes D.

b) Nennen Sie parallelgleiche Pfeile.

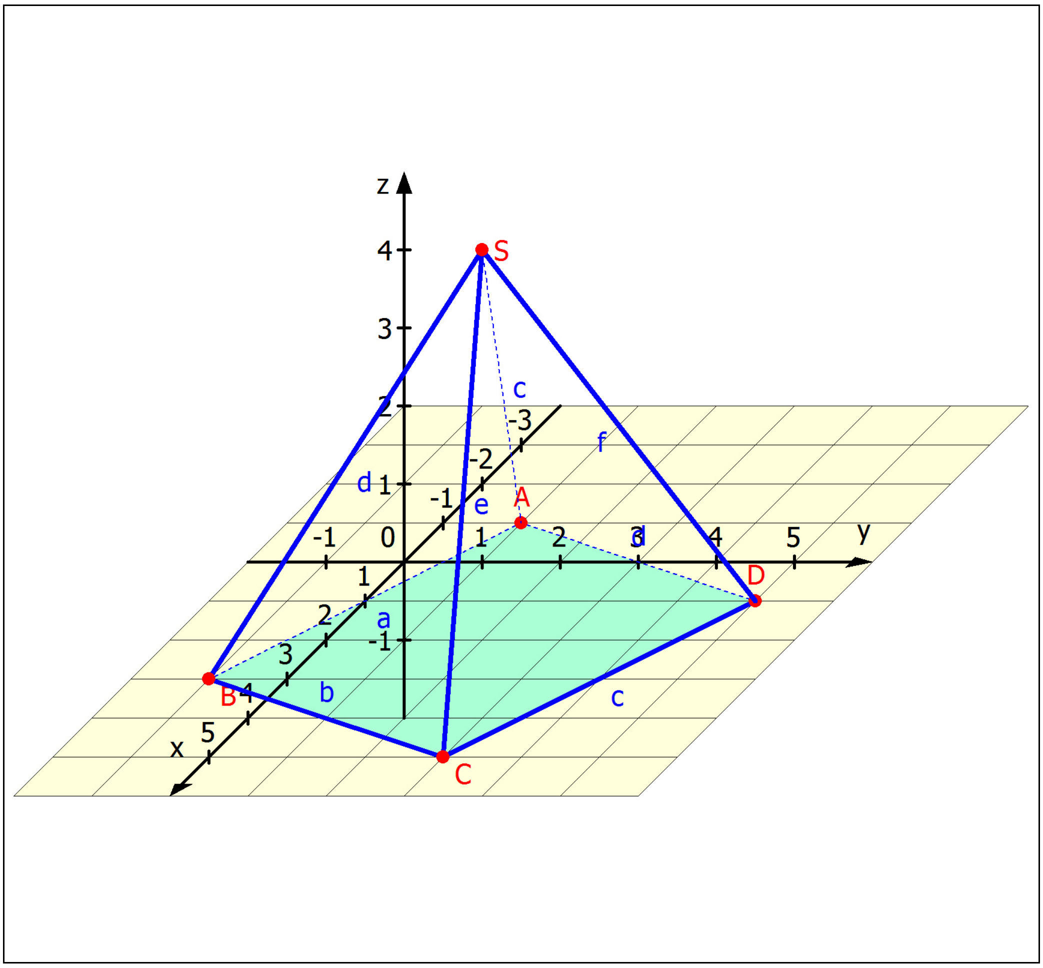
c) Nennen Sie Pfeile, die die gleiche Länge besitzen, aber nicht die gleiche Richtung.

d) Nennen Sie Pfeile, die sich nur in der Orientierung unterscheiden.

e) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

f) Beschreiben Sie die Lage der Kante AS.

Lösung:



a) $D(1 \mid 5 \mid 0)$

b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

c) $\overrightarrow{AS}$ und $\overrightarrow{BS}$ bzw. $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{BC}$

d) $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{CS}$ und $\overrightarrow{SC}$

e) Ansatz: Pyramide

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_G \cdot h$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 20FE \cdot 5LE = \underline{\underline{\frac{100}{3} VE}}$$

Wie bin ich nur auf die Grundfläche gekommen?

Addition von Vektoren

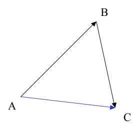
Später wollen wir natürlich mit Vektoren rechnen. Deswegen müssen wir überlegen, welche Operationen sinnvoll sind. Folgende Operationen werden sie zunächst kennenlernen:

(1) Addition und Subtraktion von Vektoren
(2) Vervielfachen eines Vektors
(3) Linearkombinationen von Vektoren

Bemerkung: Wenn Sie das Kräfteparallelogramm aus der Physik kennen, sind Sie jetzt klar im Vorteil.

Definition: Bei der Addition von 2 Vektoren oder Pfeilen wird der 2. Pfeil an die Pfeilspitze des 1. Pfeils angehängt. Die Summe der Vektoren ist dann der Vektor vom Anfang des 1. Vektors bis zum Ende des 2.Vektors.

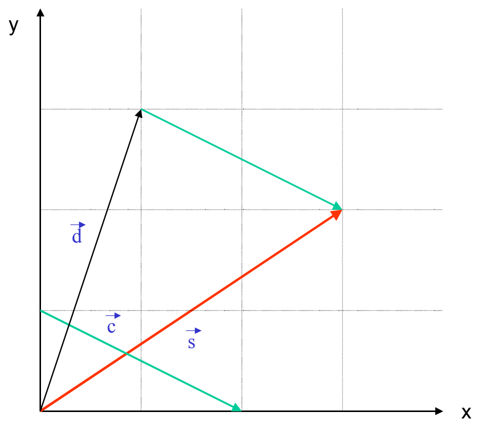
$$\boxed{\begin{array}{c} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \\ \vec{x} + \vec{y} = \vec{z} \end{array}}$$



Beispiel in der x-y-Ebene:

Zeichnen Sie folgende Vektoren, die durch die Punkte A, B, C und D gegeben sind und addieren Sie diese Vektoren.

$\vec{d} = \overrightarrow{AD}$; $\vec{c} = \overrightarrow{BC}$ mit $A(0 \mid 0)$; $B(0 \mid 1)$; $C(2 \mid 0)$ und $D(1 \mid 3)$



$$\vec{s} = \vec{d} + \vec{c}$$

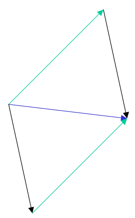
Hinweise: Wir werden später sehen, dass man die Vektoren einfach koordinatenweise addieren kann.

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{s} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Kommutativgesetz

Es scheint verständlich zu sein, dass man Zahlen bei der Addition vertauschen kann. Ist es aber möglich, Vektoren zu vertauschen? Es ist möglich, wie die folgende Skizze veranschaulicht.

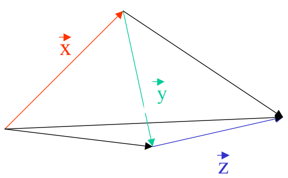
$$\boxed{\begin{array}{c} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \\ \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x} \end{array}}$$



Auftrag: Überprüfen Sie das Kommutativgesetz zeichnerisch mit dem Beispiel aus der x-y-Ebene.

Assoziativgesetz

Bei der Addition von 3 Vektoren ist es egal, welche Summanden zuerst addiert werden. Auch hier sollten Sie ein weiteres Beispiel durchdenken und zeichnen.



$$\boxed{\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{x}}$$

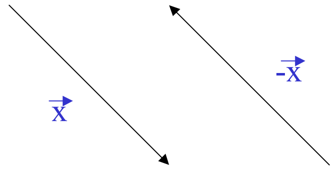
Subtraktion von Vektoren

Wie Sie vielleicht noch wissen, kann man die Vektoren auch als Verschiebungen auffassen. Der Nullvektor beschreibt dann die identische Abbildung in der Menge der Verschiebungen.

Anfangspunkt und Endpunkt stimmen beim Nullvektor überein.

$$\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \vec{o}$$

$$\vec{o} + \vec{a} = \vec{a}$$



Definition: Der entgegengesetzte Vektor von $\overrightarrow{AB}$ ist der Vektor mit umgekehrter Orientierung. $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ Es gilt: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \vec{o}$.

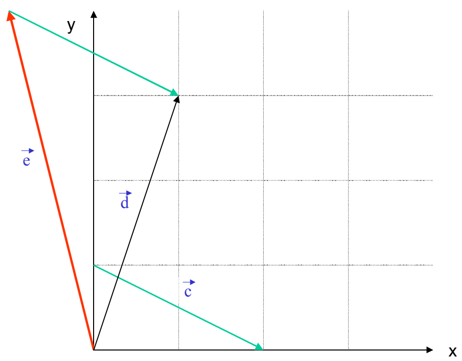
Bemerkung: Der entgegengesetzte Vektor und der Ausgangsvektor sind gleich lang und parallel. Beide haben aber unterschiedliche Orientierung. Jetzt kann die Differenz erklärt werden.

Definition: Der Vektor $\vec{y}$ wird von einem Vektor $\vec{x}$ subtrahiert, indem man den entgegengesetzten Vektor von $\vec{y}$ zum Vektor $\vec{x}$ addiert.

$$\boxed{\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + \left(-\vec{y}\right)}$$

Beispiel:

$$\boxed{\vec{e} = \vec{d} - \vec{c} = \vec{d} + \left(-\vec{c}\right)}$$

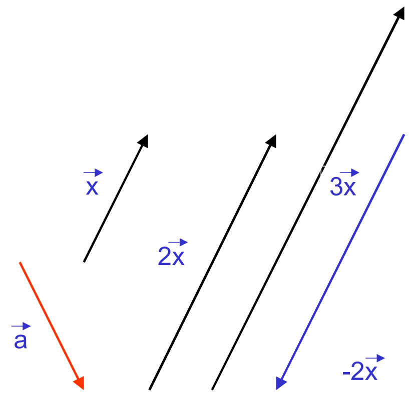


<u>Vervielfachung eines Vektors</u>

Das Produkt $k \cdot \vec{x}$ eines Vektors und einer reellen Zahl besitzt folgende Eigenschaften: Der Vektor $k \cdot \vec{x}$ besitzt gegenüber dem Vektor $\vec{x}$ die k-fache Länge und die gleiche Orientierung für $k > 0$ bzw. die engegengesetzte Orientierung Richtung für $k < 0$.

Es folgt eine wichtige Erkenntnis.

Bemerkung: Lassen sich Vektoren als Vielfache voneinander ausdrücken, dann sind sie zueinander parallel.



Bemerkungen:

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{x}$ besitzen nur die gleiche Länge.

Alle anderen Vektoren sind parallel.

Die Vektoren $\vec{x}$ und $-2\vec{x}$ besitzen nicht die gleiche Orientierung.

Beispiel: Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind offensichtlich parallel.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = -2 \cdot \vec{a}$$

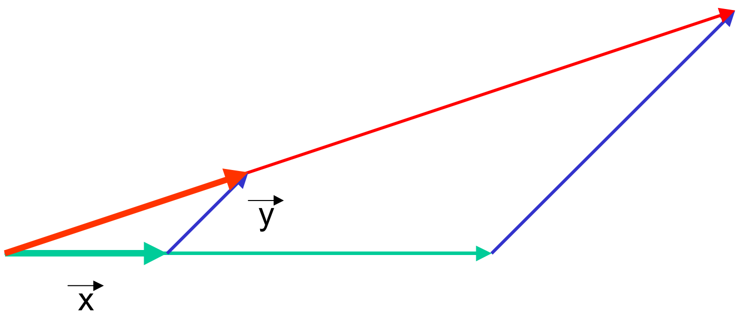
Beispiel: Die Vektoren $\vec{c}$ und $\vec{d}$ sind offensichtlich parallel.

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 24 \\ 36 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad \vec{d} = \begin{pmatrix} -18 \\ -27 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = -\tfrac{4}{3} \cdot \vec{d}$$

Satz: Für alle reellen Zahlen r und s und alle Vektoren $\vec{y}$ und $\vec{x}$ gelten das Assoziativgesetz und die Distributivgesetze.

$$(r \cdot s) \cdot \vec{x} = r \cdot (s \cdot \vec{x})$$
$$(r + s) \cdot \vec{x} = r \cdot \vec{x} + r \cdot \vec{y}$$
$$r \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = r \cdot \vec{x} + r \cdot \vec{y}$$

Beispiel (3. Gesetz): $3 \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = 3 \cdot \vec{x} + 3 \cdot \vec{y}$



Auftrag: Bestätigen Sie das 2. Gesetz durch eine Zeichnung.

Linearkombinationen

Sie kennen jetzt die Vektoraddition und das Vervielfachen von Vektoren. Wir benötigen beide Vektoroperationen, um den folgenden Begriff zu definieren.

Definition:

Der Vektor $\vec{b} = r_1 \cdot \vec{a_1} + r_2 \cdot \vec{a_2} + \ldots + r_n \cdot \vec{a_n}$ heißt Linearkombination der Vektoren $\vec{a_1}; \vec{a_2}; \vec{a_3}; \ldots; \vec{a_n}$.

Bemerkungen:

Die Zahlen $r_1; r_2; \ldots; r_n \in R$ nennt man Koeffizienten.

Mit der Linearkombination wird versucht, einen Vektor mit Hilfe von anderen Vektoren darzustellen. Das ist gar nicht so einfach.

Beispiel: Der Vektor $\vec{c}$ wird als Linearkombination der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dargestellt.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = 3 \cdot \vec{a} - 2 \cdot \vec{b}$$

Beispiel: Der Vektor $\vec{z}$ wird als Linearkombination der $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ dargestellt.

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{z} = 3 \cdot \vec{e_1} + 5 \cdot \vec{e_1} - 2 \cdot \vec{e_2}$$

Beispiel: Der Vektor $\vec{y}$ kann nicht als Linearkombination der Vektoren $\vec{g}$ und $\vec{h}$ dargestellt werden.

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$