Lösungsblätter - Thema: Rechnen mit Vektoren

1) In der 2. Dimension

Gegeben sind die Punkte $P(2 \mid 0)$, $Q(1 \mid 7)$, $R(-4 \mid 2)$ und $S(-3 \mid -5)$.

a) Weisen Sie nach, dass das Viereck PQRS ein Rhombus ist.

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$$

$$\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{QR}\right| = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$$

$$\overrightarrow{RS} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{RS}\right| = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$$

$$\overrightarrow{SP} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{SP}\right| = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$$

Alle Seiten sind gleich lang. Also ist das Viereck ein Rhombus.

b) Berechnen Sie den Schnittpunkt der Diagonalen.

Idee: Die Diagonalen halbieren einander.

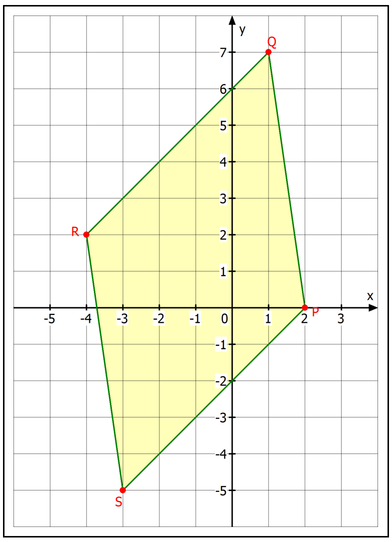
$$\overrightarrow{OS} = \frac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OR}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{S(-1 \mid 1)}}$$

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt.

Idee: Man benötigt die Länge der Diagonalen.

$$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{PR}\right| \cdot \left|\overrightarrow{QS}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{40} \cdot \sqrt{160}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6400} = \underline{\underline{40FE}}$$



2) Kollinearität

Gegeben sind die Punkte A, B und C.

$A(-1 \mid 2 \mid 3)$, $B(5 \mid 2 \mid 11)$, $C(1 \mid 9 \mid -1)$

a) Begründen Sie, dass die Punkte A, B und C nicht kollinear sind.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AB} \neq k \cdot \overrightarrow{AC}$$

(2. Koordinate funktioniert nicht.)

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes D, sodass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist.

Idee: Käfergeburt und Vektoraddition

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{D(-5 \mid 9 \mid -9)}}$

c) Genau 2 LE vom Punkt A entfernt gibt es einen Punkt E, der sich auf der Strecke $\overline{AB}$ befindet. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes E.

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \frac{\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}}{10} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 0 \\ 1{,}6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 \\ 2 \\ 4{,}6 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{E(0{,}2 \mid 2 \mid 4{,}6)}}$

3) Das Dreieck

Gegeben sind die Punkte D, E, F eines Dreiecks

$D(-2 \mid 0 \mid -3)$, $E(0 \mid 6 \mid 6)$ und $F(4 \mid 6 \mid 4)$.

a) Untersuchen Sie, ob das Dreieck gleichschenklig oder gleichseitig ist.

$$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{DE}\right| = \sqrt{4+36+81} = \sqrt{121} = 11$$

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{EF}\right| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$$

$$\overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{DF}\right| = \sqrt{36+36+49} = \sqrt{121} = 11$$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{DE}\right| = \left|\overrightarrow{DF}\right| \neq \left|\overrightarrow{EF}\right|$$

Das Dreieck ist leider nur gleichschenklig.

b) Berechnen Sie die Innenwinkel des Dreiecks.

Mit dem Tipp geht's auch. Oder so ...

Basiswinkel:

$$\cos\varepsilon = \frac{\frac{\sqrt{20}}{2}}{11}$$

$$\varepsilon = \varphi \approx \underline{\underline{78,27^\circ}}$$

Winkel an der Spitze:

$$\delta = 180^\circ - 2 \cdot 78,27^\circ$$

$$\approx \underline{\underline{23,46^\circ}}$$

4) Das Viereck

Gegeben sei ein Viereck ABCD mit $A(2 \mid -2 \mid 3)$, $B(1 \mid 1 \mid 1)$, $C(1 \mid 9 \mid -7)$ und $D(-3 \mid 3 \mid 3)$.

a) Untersuchen Sie, ob die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{AD}$ linear abhängig sind.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 11 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 5 \cdot \overrightarrow{AB} - \tfrac{4}{5} \cdot \overrightarrow{AD}$$

Die Vektoren sind also linear abhängig.

b) Die Mittelpunkte der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{AD}$ sind die Eckpunkte eines weiteren Vierecks. Weisen Sie nach, dass dieses Viereck ein Parallelogramm ist.

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ -0,5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{OH} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}}{2} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1,5 \\ -0,5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 5,5 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{HG} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0,5 \\ 0,5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 5,5 \\ -5 \end{pmatrix} = \overrightarrow{EF}$$

Wenn die gegenüberliegenden Vektoren identisch sind, dann ist nachgewiesen, dass es ein Parallelogramm ist.

c)* Weisen Sie nach, dass die Aussage b) unabhängig von den Koordinaten der Punkte A, B, C und D ist.

$$\overrightarrow{OE} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2} \qquad \overrightarrow{OF} = \frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2} \qquad \overrightarrow{OH} = \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}}{2}$$

$$\overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2} - \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2} = \frac{\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}}{2}$$

$$\overrightarrow{HG} = \frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2} - \frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}}{2} = \frac{\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}}{2} = \overrightarrow{EF}$$