Umformen von Ebenengleichungen

Die parameterfreie Gleichung

Definition: Die parameterfreie Gleichung hat die Form ax + by + cz = d. Sie ist bis auf Vielfache der Gleichung eindeutig.

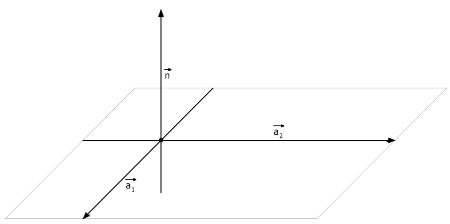
$$\boxed{\varepsilon : ax + by + cz = d}$$

Beispiel:

$$\boxed{\varepsilon : 6x + 4y - 3z = 12} \qquad \boxed{\varepsilon : \tfrac{x}{2} + \tfrac{y}{3} - \tfrac{z}{4} = 1}$$

Definition: Der Vektor, der sich aus den 3 Koeffizienten zusammensetzt, heißt Normalenvektor der Ebene. Er steht senkrecht auf der Ebene.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$



Umformen der vektoriellen Gleichung in die Koordinatengleichung

Zunächst klären wir, wie man den Normalenvektor berechnet. Dieser steht senkrecht auf der Ebene und damit senkrecht auf den beiden Spannvektoren. Es gibt sogar eine Rechenoperation dafür.

Definition: Der Vektor $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$ heißt Vektorprodukt oder Kreuzprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Bemerkung: Das Kreuzprodukt ist also eine Funktion, die 2 Vektoren auf einen Vektor abbildet: $\vec{a}, \vec{b} \to \vec{c} \in \mathbb{R}^3$

Dabei steht der Ergebnisvektor senkrecht auf den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Spannvektoren einer Ebene, dann erhält man also einen Normalenvektor.

Umformen von Ebenengleichungen

1. Beispiel:

Im ersten Beispiel üben wir nur das Kreuzprodukt. Die farbigen Linien sind zur Hilfe gedacht.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12-15\\-(6-12)\\5-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12-15\\-(6-12)\\5-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$$

2. Beispiel:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-6\\-(0-(-2))\\-3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-2\\-3\end{pmatrix}$$

3. Beispiel: Jetzt folgt ein erstes Beispiel zur Ebenenumwandlung:

Gegeben ist die Ebene E mit der Gleichung:

$$E:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\5\\-6\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}14\\1\\-12\end{pmatrix}\quad \text{mit } r,s\in\mathbb{R}$$

Normalenvektor:

$$\vec{n}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\5\\-6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}14\\1\\-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-60+6\\-(24+84)\\-2-70\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-54\\-108\\-72\end{pmatrix}$$

Die Länge und die Orientierung des Normalenvektors sind für die Ebene irrelevant. Also können wir auch den folgenden Normalenvektor verwenden.

$$\vec{n_2}=\tfrac{1}{9}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}-6\\-12\\-8\end{pmatrix}\qquad \text{oder}\qquad \vec{n_3}=-\tfrac{1}{2}\cdot\vec{n_2}=\begin{pmatrix}3\\6\\4\end{pmatrix}$$

Für unsere Ebene gilt also zunächst:

$E: 3x+6y+4z=d$

Und wie erhalten wir den Wert für d? Richtig, die Punktprobe. Wir setzen einfachen den Punkt ein.
$3\cdot 2+6\cdot 1+4\cdot 0=6+6+0=12$
Also lautet die Ebenengleichung: $E: 3x+6y+4z=12$

Umformen von Ebenengleichungen

4. Beispiel:

$$E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ -(1-2) \\ 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$-2x + y + 3z = d$$

$$0 + 8 + 45 = d$$

$$d = 53$$

Also lautet die Ebenengleichung: $E_2: -2x + y + 3z = 53$

Umwandlung der parameterfreien Gleichung in die Parameterform

Es werden 3 Punkte bestimmt, die nicht auf einer Geraden liegen. (Insbesondere kann man die Durchstoßpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen bestimmen.)

Mit diesen 3 Punkten wird dann die 3-Punkte-Gleichung aufgestellt.

$$\varepsilon: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} \qquad (r, s \in \mathbb{R})$$

1. Beispiel:

$$\Sigma: 4x + 5y - 7z = 28$$

Es werden 3 Punkte bestimmt, die nicht kollinear sind. Hier bieten sich die Durchstoßpunkte mit den Koordinatenachsen an.

$A(7 \mid 0 \mid 0) \qquad B(0 \mid 5{,}6 \mid 0) \qquad C(0 \mid 0 \mid -4)$

Mit diesen 3 Punkten kann jetzt die 3-Punkte-Gleichung aufgestellt werden.

$$\Sigma: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -7 \\ 5{,}6 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad (u, v \in \mathbb{R})$$

2. Beispiel:

Bei einer besonderen Lage wird es problematischer.

$$\Sigma: 3x - 10z = 6$$

Es werden 3 Punkte bestimmt, die nicht kollinear sind. Hier bieten sich zunächst 2 Durchstoßpunkte mit der der x-Achse und der z-Achse an. Beim dritten Punkt verändert man die Koordinate, die in der Koordinatengleichung fehlt.

$A(2 \mid 0 \mid 0) \qquad B(0 \mid 0 \mid -0{,}6) \qquad C(2 \mid 1 \mid 0)$

Mit diesen 3 Punkten kann jetzt die 3-Punkte-Gleichung aufgestellt werden.

$$\Sigma: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -0{,}6 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (u, v \in \mathbb{R})$$

Umformen von Ebenengleichungen