Lagebeziehung von Geraden

Wie können sich 2 Geraden im Raum zueinander verhalten?

$g: \vec{x} = \vec{p_1} + t \cdot \vec{a_1} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad h: \vec{x} = \vec{p_2} + s \cdot \vec{a_2} \quad (s \in \mathbb{R})$

Im Raum gibt es 4 Fälle. Zunächst können 2 Geraden identisch sein. Alle Punkte der einen Gerade sind auch Punkte der anderen Gerade. Weiterhin können 2 Geraden parallel sein. Diese beiden Fälle haben eines gemeinsam. Die Richtungsvektoren der beiden Geraden sind parallel. Sollte das nicht der Fall sein, dann tritt einer der beiden anderen Fälle ein. Entweder besitzen die Geraden einen Schnittpunkt oder sie sind windschief zueinander.

	identisch	parallel	Schnittpunkt	windschief
Ebene	x	x	x	
Raum	x	x	x	x

Fallunterscheidung:

Zunächst einmal untersucht man die Richtungsvektoren auf lineare Abhängigkeit. Man testet also, ob sie Vielfache voneinander sind. Dadurch kann man das Problem schon einmal klassifizieren.

1.Fall: $\vec{a_1} \parallel \vec{a_2}$ Die Geraden sind parallel oder identisch.

2.Fall: $\vec{a_1} \nparallel \vec{a_2}$ Die Geraden sind windschief oder besitzen einen Schnittpunkt.

Sind die Richtungsvektoren Vielfache voneinander, dann wird anschließend die Punktprobe durchgeführt. Man untersucht, ob ein beliebiger Punkt der einen Gerade auch auf der anderen Gerade liegt. Damit kann man unterscheiden, ob die Geraden identisch oder echt parallel sind.

Fall 1a) $P_2 \in g_1$ Die Geraden sind identisch.
Fall 1b) $P_2 \notin g_1$ Die Geraden sind parallel.

Sind die Richtungsvektoren keine Vielfachen voneinander, dann ist die Punktprobe nicht sinnvoll. Jetzt sollte man die Geraden gleichsetzen und versuchen, eine Lösung zu berechnen. Wenn es diese eine Lösung gibt, dann hat man nachgewiesen, dass die Geraden einen Schnittpunkt besitzen.

Fall 2a) LGS besitzt eine Lösung. Die Geraden besitzen einen Schnittpunkt.
Fall 2b) LGS besitzt keine Lösung. Die Geraden sind windschief.

Bemerkung: Hier noch die Schreibweisen der 4 Fälle.

$g \equiv h$: Die Geraden sind identisch.

$g \parallel h$: Die Geraden sind *parallel.*

$g \cap h = S$: Die Geraden schneiden sich im Punkt S.

$g \overset{x}{-} h$: Die Geraden sind windschief.

Lagebeziehung von Geraden

1.Beispiel:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ -14 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Zunächst wird überprüft ob die Richtungsvektoren parallel sind:

Ansatz : $\vec{a_1} = k \cdot \vec{a_2}$

$$3 = k \cdot 1 \Rightarrow k = 3$$

$$1 = k \cdot 2 \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

$$2 = k \cdot 3 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

Die Richtungsvektoren sind nicht parallel. Also können die Geraden nur noch windschief oder schneidend sein.

Jetzt werden die Geraden gleichgesetzt:

$$\vec{x} = \vec{x}$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ -14 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\begin{array}{lll} \text{I}: 10 + 3t = 9 + s & \text{I}: s = 3t + 1 & s = 3t + 1 \\ \text{II}: 7 + t = -10 + 2s & \text{II}: 7 + t = -10 + 2(3t + 1) & 7 + t = -8 + 6t \\ \text{III}: 10 + 2t = -14 + 3s & \text{III}: 10 + 2t = -14 + 3(3t + 1) & 10 + 2t = -11 + 9t \end{array}$$

$$\text{I}: s = 10$$

$$\text{II}: t = 3$$

$$\text{III}: t = 3$$

Es gibt also eine Lösung. Der Schnittpunkt lautet:

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ -14 \end{pmatrix} + 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 10 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{S(19 \mid 10 \mid 16)}}$$

Lagebeziehung von Geraden

2.Beispiel (windschief):

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}) \qquad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (s \in \mathbb{R})$$

Zunächst wird überprüft ob die Richtungsvektoren parallel sind:

Ansatz : $\vec{a_1} = k \cdot \vec{a_2}$

$$0 = k \cdot 6 \Rightarrow k = 0$$

$$1 = k \cdot 0 \Rightarrow k = \text{n.d.}$$

$$2 = k \cdot 2 \Rightarrow k = 1$$

Die Richtungsvektoren sind nicht parallel. Also können die Geraden nur noch windschief oder schneidend sein.

Jetzt werden die Geraden gleichgesetzt:

$$\vec{x} = \vec{x}$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\text{I} : 5 = 1 + 6s \qquad \text{I} : s = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\text{II} : 7 + t = 2 \qquad \text{II} : t = -5$$

$$\text{III} : -1 + 2t = 5 + 2s \qquad \text{III} : -11 = \frac{19}{3} \text{f.A.}$$

Es gibt also keine Lösung und damit keinen Schnittpunkt.
Die Geraden sind windschief.

Lagebeziehung von Geraden

3. Beispiel (echt parallel):

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Zunächst wird überprüft, ob die Richtungsvektoren parallel sind:

$$\text{Ansatz}: \vec{a_1} = k \cdot \vec{a_2}$$

$$2 = -3k \Rightarrow k = -\frac{2}{3}$$

$$6 = -9k \Rightarrow k = -\frac{2}{3}$$

$$-2 = 3k \Rightarrow k = -\frac{2}{3}$$

Die Richtungsvektoren sind parallel. Also können die Geraden nur noch parallel oder identisch sein.

Jetzt wird überprüft ob ein Punkt einer Geraden auch auf der anderen Gerade liegt.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$4 = 0 + 2t \Rightarrow t = 2$$

$$1 = 1 + 6t \Rightarrow t = 0$$

$$5 = 2 - 2t \Rightarrow t = -\frac{3}{2}$$

Der Punkt P(4;1;5) liegt nur auf einer Geraden, also sind die Geraden parallel und nicht identisch.

Beispiel 4:

Auftrag: Weisen Sie nach, dass die Geraden identisch sind.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -39 \\ -15 \\ 86 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3}{2} \\ -6 \end{pmatrix}$$