Grundkurs 5ma13 Mathematik 2016/2017
Ergebnisse 4

1. Untersuchen Sie die Lagebeziehung der beiden Geraden und berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

Untersuchung der Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} k = 3 \\ k = 2 \\ k = \text{n.d.} \end{matrix}$$

Die Richtungsvektoren sind nicht parallel.
Also können die Geraden nur windschief oder schneidend sein.
LGS:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{I}: -2 + t = -2 + 3s$$

$$\text{II}: 1 + 2t = 3 + 4s$$

$$\text{III}: 1 = -1 + 2s$$

Die letzte Gleichung liefert: $s = 1$.
Diesen Wert setzen wir in die ersten beiden Gleichungen ein.

$$\text{I}: -2 + t = 1 \Rightarrow t = 3$$

$$\text{II}: 1 + 2t = 7 \Rightarrow t = 3$$

Damit ist das LGS lösbar. Die Geraden schneiden sich.
$g \cap h = S$
Schnittpunkt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{S(1 \mid 7 \mid 1)}}$$

2. Untersuchen Sie die Lagebeziehung der beiden Geraden und berechnen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

Untersuchung der Richtungsvektoren:

$$\begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} k = -\frac{3}{2} \\ k = -\frac{3}{2} \\ k = -\frac{3}{2}. \end{matrix}$$

Die Richtungsvektoren sind parallel.
Also können die Geraden nur parallel oder identisch sein.
Punktprobe:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} t = 0 \\ t = \frac{5}{6} \\ t = -\frac{10}{9} \end{matrix}$$

Der Punkt liegt nicht auf der anderen Geraden.
Also sind die Geraden echt parallel. $g \parallel h$

3. Gegeben sind die 3 Punkte $A(1 \mid 2 \mid 3)$, $B(2 \mid 1 \mid 3)$ und $C(3 \mid 2 \mid 1)$.
   a) Zeigen Sie, dass die Punkte nicht auf einer Geraden liegen.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$ Die Richtungsvektoren sind nicht parallel.

   b) Berechnen Sie eine Ebenengleichung durch die 3 Punkte.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad r, s \in \mathbb{R}$$

   c) Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks ABC.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2} \qquad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{8} \qquad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{6} \qquad u = \underline{\underline{\sqrt{2} + \sqrt{6} + \sqrt{8}}}$$

4. Gegeben ist die Gleichung der Ebene ε.

$$\varepsilon: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r, s \in \mathbb{R}$$

   a) Beschreiben Sie die besondere Lage im Raum.
      Die Ebene verläuft parallel zur x-Achse oder steht senkrecht auf der y-z-Ebene.
   b) Berechnen Sie die Durchstoßpunkte mit den Achsen, falls diese existieren.

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} x = -2 + r + 4s \\ -3 = r \\ -\frac{5}{2} = r \end{matrix}$$

Das ist ein Widerspruch. Der Durchstoßpunkt mit der x-Achse existiert nicht. Das passt zu Teilaufgabe a).

$$\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 = -2 + r + 4s \\ y = 3 + r \\ -\frac{5}{2} = r \end{matrix}$$

Es gilt also: $y = 3 - \frac{5}{2} = 0,5 \Rightarrow \underline{\underline{D_y(0 \mid \frac{1}{2} \mid 0)}}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 = -2 + r + 4s \\ -3 = r \\ z = 5 + 2r \end{matrix}$$

Es gilt also: $y = 5 - 6 = -1 \Rightarrow \underline{\underline{D_z(0 \mid 0 \mid -1)}}$