Geraden

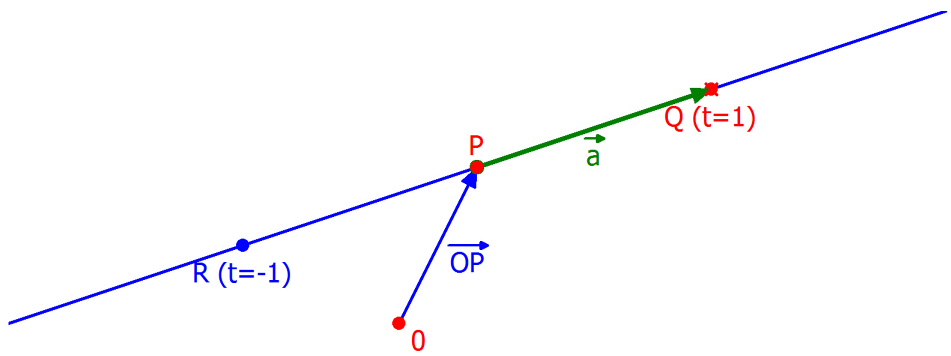
Zielorientierung: Ein Flugzeug befindet sich 11:35 Uhr im Punkt
$P(3{,}000 \mid 4{,}000 \mid 9{,}995)$. Um genau 11:40 befindet es sich im Punkt
$Q(46{,}200 \mid 65{,}800 \mid 10{,}150)$.
Wann erreicht es die maximale Flughöhe von 11 km?
Wie schnell ist das Flugzeug?

Zunächst wollen wir klären, wie man Geraden im Raum beschreibt. Dazu benötigt man einen festen Punkt und eine Richtung.

Definition: Gegeben sei ein Punkt P mit dem Ortsvektor $\vec{p} = \overrightarrow{OP}$ und ein Richtungsvektor $\vec{a} \neq \vec{o}$. Dann beschreibt die Gleichung

$$\boxed{\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{a}} \quad \text{bzw.} \quad \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{a} \quad (t \in \mathbb{R})$$

eine Gerade g mit dem Punkt P und dem Richtungsvektor $\vec{a}$.



Bemerkungen:
- Für jeden Wert des freien Parameters t ergibt sich ein Ortsvektor, der einem Punkt auf dieser Geraden entspricht.
- Der Vektor $\vec{p}$ wird oft als Stützvektor bezeichnet.
- Diese Form der Geradengleichung nennt man Punktrichtungsgleichung. Sie ist eine vektorielle Gleichung bzw. eine Parametergleichung.
- Der sogenannte Variablenvektor kann auch so geschrieben werden:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Geraden

Beispiel:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Auf dieser Geraden liegen beispielsweise die Punkte ...

$P_0(3 \mid 1 \mid 0)$ für $t = 0$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$P_1(4 \mid 0 \mid 6)$ für $t = 1$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$P_2(5 \mid -1 \mid 12)$ für $t = 2$

$P_{10}(13 \mid -9 \mid 60)$ für $t = 10$

Bemerkung:

- *Die Geradengleichung selbst ist nicht eindeutig.*
- *Man kann für den Stützvektor einen anderen Punkt benutzen, der aber auf der Geraden liegen muss.*
- *Den Richtungsvektor kann man vervielfachen, ohne die Gerade zu ändern.*

Aufgabe: Schreiben Sie die Geradengleichung um, ohne die Gerade zu verändern.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Folgende Geradengleichungen beschreiben dieselbe Gerade.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad , \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ -40 \end{pmatrix}$$

Geraden

Punktprobe

Wie kann man überprüfen, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt?

Bemerkung: Man testet, ob es einen Wert t gibt, sodass für den Variablenvektor die Koordinaten des Punktes herauskommen.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \ , \ A(-7 \mid 10 \mid -1) \ , \ B(-2 \mid 0 \mid 3) \ , \ C_a(3 \mid -10 \mid a)$$

Diese Frage führt jeweils auf ein einfaches LGS mit einer Variablen.

$$\begin{pmatrix} -7 \\ 10 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{I}: -7 = -3 + 2t \Rightarrow t = -2$$

$$\text{II}: 10 = 2 - 4t \Rightarrow t = -2$$

$$\text{III}: -1 = \frac{1}{2} + 5t \Rightarrow t = -0,3$$

$$\underline{\underline{A \notin g}}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{I}: -2 = -3 + 2t \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{II}: 0 = 2 - 4t \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\text{III}: 3 = \frac{1}{2} + 5t \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{B \in g}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{I}: 3 = -3 + 2t \Rightarrow t = 3$$

$$\text{II}: -10 = 2 - 4t \Rightarrow t = 3$$

$$\text{III}: a = \frac{1}{2} + 5t \Rightarrow a = 15,5$$

$$a = \frac{31}{2} \Rightarrow \underline{\underline{C \in g}}$$

$$a \neq \frac{31}{2} \Rightarrow \underline{\underline{C \notin g}}$$

Geraden

Besondere Lage im Raum

Geben Sie Geradengleichungen für die 3 Koordinatenachsen an.

$$x-\text{Achse}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y-\text{Achse}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z-\text{Achse}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Ist der Stützvektor der Nullvektor, dann kann man ihn also weglassen.

Aufgabe: Beschreiben Sie die besondere Lage der Geraden im Raum.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$i: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

g verläuft parallel zur z-Achse
h verläuft innerhalb der y-z-Ebene
i verläuft parallel zur x-z-Ebene

Strecken und Strahlen (Halbgeraden)

Information: Man kann den Parameter auch einseitig oder zweiseitig einschränken, dann beschreibt die Punktmenge einen Strahl bzw. eine Strecke.

Beispiel (Strecke):

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}, 0 \le t \le 1)$$

Diese Gleichung beschreibt eine Strecke vom Punkt A(1;2;3) bis zum Punkt B(2;3;4).
Frage: Wie überprüft man, ob ein Punkt auf einer Strecke liegt?

Beispiel (Strahl):

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}, t \ge 0)$$

Diese Gleichung beschreibt einen Strahl mit dem Anfangspunkt Punkt A(1;2;3).

Geraden

Punkte mit Parametern

Information: Ein Punkt mit einem linearem Parameter kann als Gerade geschrieben werden.

Beispiel:

$P_a(3+a \mid 2-2a \mid 1+4a)$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3+a \\ 2-2a \\ 1+4a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$(a \in \mathbb{R})$

Aufgabe: Schreiben Sie die Punktmenge als Gerade.

$P_k\left(1-\frac{k}{2} \mid 5 \mid 3k\right)$

Knobelaufgabe:
Beschreiben Sie dieses geometrische Objekt.

$P_k(k \mid k^2 \mid 0) \qquad (k \in \mathbb{R})$

Lösungen:

Aufgabe: Schreiben Sie die Punktmenge als Gerade.

$P_k\left(1-\frac{k}{2} \mid 5 \mid 3k\right)$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1-\frac{k}{2} \\ 5 \\ 3k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$(k \in \mathbb{R})$

Knobelaufgabe:

$P_k(k \mid k^2 \mid 0) \qquad (k \in \mathbb{R})$

Es handelt sich um die Normalparabel $y = x^2$ in der x-y-Ebene.

Geraden

Zeichnen einer Gerade

Information: Um eine Gerade darzustellen, ist es sinnvoll, die Durchstoßpunkte mit den Koordinatenachsen zu berechnen. Wir betrachten folgendes ...

Beispiel:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Durchstoßpunkt mit der x-y-Ebene: Hier gilt z = 0.
Man muss also überlegen, wann die z-Koordinate der Gerade 0 wird.

$$z = -1 - t$$
$$0 = -1 - t$$
$$t = -1$$

Diesen Wert t setzt man in die Geradengleichung ein und erhält den Durchstoßpunkt.

$$\overrightarrow{OD_{xy}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{D_{xy}(1 \mid 3 \mid 0)}}$$

Durchstoßpunkt mit der x-z-Ebene: Hier gilt y = 0.

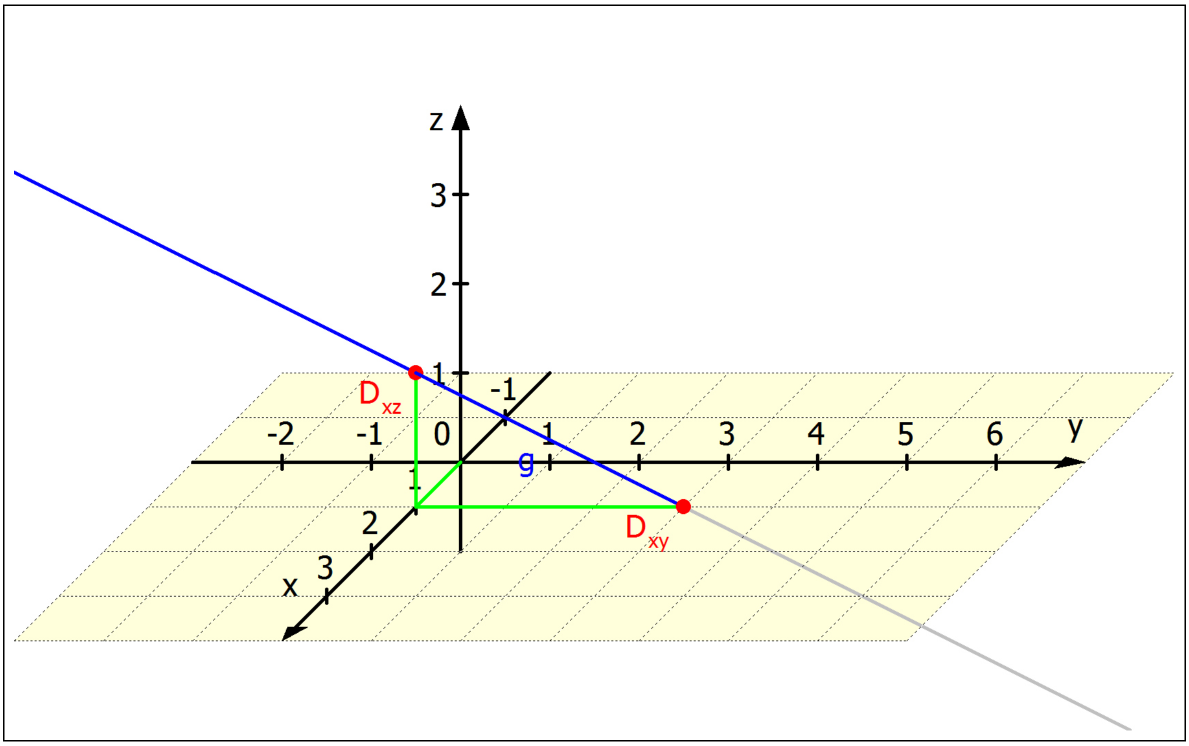
$$y = 5 + 2t$$
$$t = -\frac{5}{2}$$

Diesen Wert t setzt man in die Geradengleichung ein und erhält den Durchstoßpunkt.

$$\overrightarrow{OD_{xz}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} - \tfrac{5}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad \underline{\underline{D_{xz}(1 \mid 0 \mid \tfrac{3}{2})}}$$

Durchstoßpunkt mit der y-z-Ebene: Hier müsste gelten: x = 0. Das funktioniert aber nicht. Deshalb gibt es keinen Durchstoßpunkt mit der y-z-Ebene.

Geraden



Aufgabe: Berechnen Sie die Durchstoßpunkte mit den Koordinatenebenen.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

$t = 5$ $\qquad \underline{\underline{D_{xy}(30 \mid 9 \mid 0)}}$

$t = 2$ $\qquad \underline{\underline{D_{xz}(18 \mid 0 \mid 3)}}$

$t = -2,5$ $\qquad \underline{\underline{D_{yz}(0 \mid -13,5 \mid 7,5)}}$