

Ebenen

Lagebeziehung von Punkten und Ebenen

Verfahren:

- Einsetzen des Punktes für den Variablenvektor
- LGS mit 3 Gleichungen und 2 Variablen lösen
- eindeutige Lösung \Rightarrow Punkt liegt in der Ebene

Auftrag: Überprüfen Sie, ob die Punkte A und B in der Ebene E liegen.

$$A(2 \mid 0 \mid 0) ; B(3 \mid 4 \mid -5) ; C(1 \mid 1 \mid 1) \quad E : \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Hier ist es noch einfach, da die ersten beiden Gleichungen nur einen freien Parameter besitzen.

Lösung:

$$2 = 1 - r$$

$$0 = 1 - s$$

$$0 = r + s$$

$$r = -1$$

$$s = 1$$

$$0 = 0$$

$$\text{w.A.} \Rightarrow A \in E$$

$$3 = 1 - r$$

$$4 = 1 - s$$

$$-5 = r + s$$

$$r = -2$$

$$s = -3$$

$$-5 = -5$$

$$\text{w.A.} \Rightarrow B \in E$$

$$1 = 1 - r$$

$$1 = 1 - s$$

$$1 = r + s$$

$$r = 0$$

$$s = 0$$

$$1 = 0$$

$$\text{f.A.} \Rightarrow C \notin E$$

Ebenen

Durchstoßpunkte mit den Achsen

Auftrag: Ermitteln Sie die Durchstoßpunkte der Achsen mit der Ebene. Tragen Sie diese Punkte in ein Koordinatensystem ein. So erhalten Sie einen Eindruck von der Ebene.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix} \text{ mit } r, s \in \mathbb{R}$$

Der Durchstoßpunkte mit der x-Achse hat die Koordinaten $D(x \mid 0 \mid 0)$. **Es gilt also:**

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$x = 2 - 2r + 14s$$

$$0 = 1 + 5r + s$$

$$0 = -6r - 12s$$

Die letzten beiden Gleichungen liefern die Werte für r und s:

$$\begin{array}{lcl} 5r + s = -1 & \dots & 5r + s = -1 \\ r + 2s = 0 & & r + 2s = 0 \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{l} r = -\frac{2}{9} \\ s = \frac{1}{9} \end{array}$$

Diese kann man jetzt in die 1. Gleichung einsetzen und erhält x.

$$x = 2 + \frac{4}{9} + \frac{14}{9} = 4 \Rightarrow D_x(4 \mid 0 \mid 0)$$

Aufgabe: Berechnen Sie die Durchstoßpunkte mit den beiden anderen Achsen.

$$r = \frac{2}{9} \text{ und } s = -\frac{1}{9} \Rightarrow D_y(0 \mid 2 \mid 0)$$

$$r = -\frac{1}{6} \text{ und } s = -\frac{1}{6} \Rightarrow D_z(0 \mid 0 \mid 3)$$