1) Die Weihnachtspyramide

a) Gerade durch A und S:

$$s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0,6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (t \in R)$$

x-y-Koordinatenebene:

$$E: \; z = 0$$

Durchstoßpunkt von g mit E mit Lagebeziehung Gerade-Ebene

$$z = 0 = 0,6 + 4t$$

$$t = -0,15$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0,6 \end{pmatrix} - 0,15 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{A'(2,3 \mid 0 \mid 0)}}$

Abstand zur Spitze S:

$$\overrightarrow{A'S} = \begin{pmatrix} -2,3 \\ 0 \\ 4,6 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{A'S}\right| = \sqrt{2,3^2 + 4,6^2} = 5,14$$

Die Streben besitzen eine Länge von 5,14 dm bzw. 51,4 cm.

b) Mittelpunkt:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}{2} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0,6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0,6 \end{pmatrix}}{2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,6 \end{pmatrix}$$

$\underline{\underline{M(0 \mid 0 \mid 0,6)}}$

$$r = 2dm \qquad A = \pi r^2 \approx \underline{\underline{12,56 dm^2}}$$

c) Idee für die Höhe:

$$h = 0,6 + 1,5 = 2,1$$

$$E_2 : z = 2,1$$

$$s : \overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0,6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad (t \in R)$$

Durchstoßpunkt von g mit E_2 mit Lagebeziehung Gerade-Ebene

$$\underline{\underline{A''(1,25 \mid 0 \mid 2,1)}}$$

$$r = 1,25\text{dm} \qquad A = \pi r^2 \approx \underline{\underline{4,91\text{dm}^2}}$$

d) Parallelität:

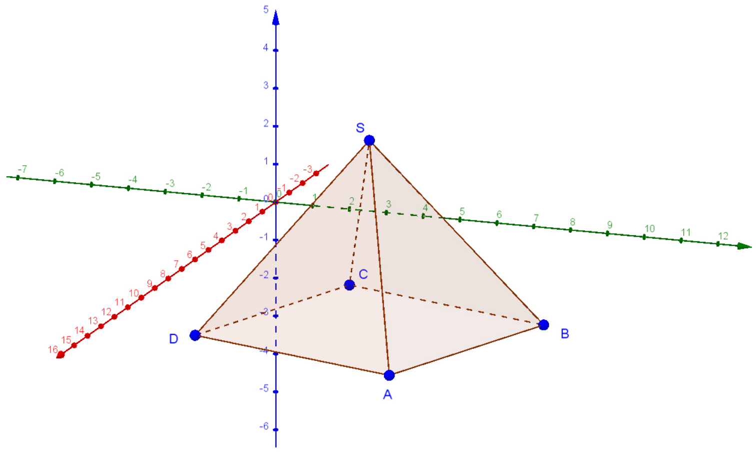
$$\overrightarrow{ON} = \begin{pmatrix} 0,4 \\ 0 \\ -0,2 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0 \\ -0,4 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{PQ} = 2 \cdot \overrightarrow{ON} \Rightarrow \overline{PQ} \parallel \overline{ON}$$

gleiche Schenkel:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -0,2 \\ 1,5 \\ 0,1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{NQ} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 1,5 \\ -0,1 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{OP}\right| = \left|\overrightarrow{NQ}\right| = \sqrt{2,3} \Rightarrow \overline{OP} = \overline{NQ}$$

2) Die Pyramide

a)



$$E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \underline{\underline{A(8 \mid 6 \mid -2)}}$$

$$E_1 \cap E_3 \cap E_4 = \underline{\underline{B(2 \mid 8 \mid -2)}}$$

$$E_1 \cap E_4 \cap E_5 = \underline{\underline{C(0 \mid 2 \mid -2)}}$$

$$E_1 \cap E_5 \cap E_2 = \underline{\underline{D(6 \mid 0 \mid -2)}}$$

$$E_2 \cap E_3 \cap E_4 = \underline{\underline{S(4 \mid 4 \mid 3)}}$$

Grundfläche ABCD in der Ebene: z = -2

Spitze in der Ebene: z = 3

Höhe der Pyramide: h = 5

Grundfläche:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{40} \;\Rightarrow\; A_G = 40$$

Volumen:

$$V = \tfrac{1}{3} \cdot A_G \cdot h = \underline{\underline{66\tfrac{2}{3}\text{VE}}}$$

b)

z.B. Ebene durch A, C und S:

$$-x + 2y = 4$$

z.B. Ebene durch B, D und S:

$$x + 2y = 12$$

die eine waagerechte Ebene:

$$z = 3 - 5 \cdot \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}} = -0,9685$$