1. In einem Bergwerk sollen Bergleute gerettet werden. Es wird vermutet, dass sich die Bergleute in einem Stollen befinden, der als geradlinig angesehen werden kann. Dieser Stollen kann in einem kartesischen Koordinatensystem (1 Längeneinheit entpricht 1 m) beschrieben werden. Er beginnt im Punkt $S_1(25 \mid 30 \mid -60)$ und endet im Punkt $S_2(-100 \mid -10 \mid -50)$.

   Zur Rettung der Bergleute wird eine senkrechte Bohrung nach unten vorgenommen, die auf der Erdoberfläche im Punkt $B(-62,5 \mid 2 \mid 0)$ beginnt.

   (1 Längeneinheit entpricht 1 m)

   a) Zeigen Sie, dass die Bohrung geeignet ist, um die Bergleute zu finden.

   b) Berechnen Sie die Länge der Bohrung.

Stollen: $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} 25 \\ 30 \\ -60 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -125 \\ -40 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 1)$

Bohrung: $b: \vec{x} = \begin{pmatrix} -62,5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (r \geq 0)$

Schnittpunkt mit ABI2015: Geometrie 1: Lagebeziehung

$\underline{\underline{S(-62,5 \mid 2 \mid -53)}}$

Der Punkt liegt im Bereich des Stollens, da die Koordinaten zwischen denen der Punkte S_1 und S_2 liegen.

$-100 < -62,5 < 25$

$-10 < 2 < 30$

$-60 < -53 < -50$

Die Länge der Bohrung beträgt offensichtlich 53 m.

2. Ein Schaufenster mit einer rechteckigen Glasscheibe wird durch die Eckpunkte A(1|-3|3), B(8|2|3), C(8|2|7) und D(1|-3|7) begrenzt. Eine Fliege ist geradlinig unterwegs und befindet sich zum Zeitpunkt t = 0 im Punkt F(10|5|8). Nach 2 Sekunden befindet sie sich im Punkt G(8|3|7,2). (1 LE entpricht 1 m)
   a) Berechnen Sie das Volumen der Scheibe, wenn diese eine Dicke von 2 mm besitzt und berechnen Sie die Geschwindigkeit der Fliege.
   b) Weisen sie nach, dass die Fliege gegen die Scheibe fliegt und geben Sie den Zeitpunkt des Auftreffens an.

Volumen der Scheibe:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{74}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = 4$$

$$V = \sqrt{74} \cdot 100\text{cm} \cdot 4000\text{cm} \cdot 0{,}2\text{cm} \approx \underline{\underline{68818{,}6\text{cm}^3}}$$

$$= \sqrt{74}\,\text{m} \cdot 4\text{m} \cdot 0{,}002\text{m} \approx \underline{\underline{0{,}0688\text{m}^3}}$$

Geschwindigkeit:

$$\overrightarrow{FG} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 7{,}2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -0{,}8 \end{pmatrix} \Rightarrow \left|\overrightarrow{FG}\right| = \sqrt{4+4+0{,}64} = \sqrt{8{,}64}$$

$$v = \frac{\sqrt{8{,}64} \cdot \text{m}}{2\text{s}} \approx \underline{\underline{1{,}47\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

Kollision:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad 0 \le r \le 1 \text{ und } 0 \le s \le 1$$

$$E: 10x - 14y = 52$$

$$f: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -0{,}8 \end{pmatrix}$$

$$E \cap f: \text{ABI2015}$$

$$\underline{\underline{S(4{,}5 \mid -0{,}5 \mid 5{,}8)}}$$

$$10 - 2t = 4{,}5$$

$$t = 2{,}75 \Rightarrow 2{,}75 \cdot 2\text{s} = 5{,}5\text{s}$$

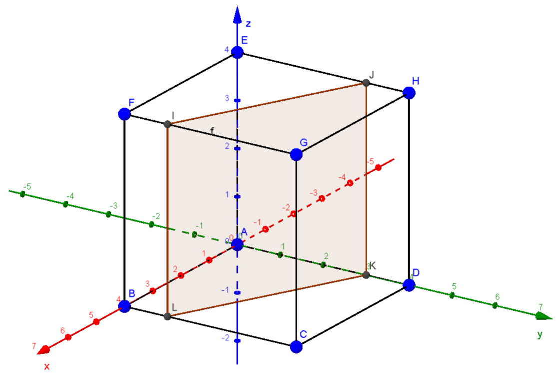
Der Auftreffpunkt liegt wirklich auf der Scheibe, da die Koordinaten stets zwischen den Koordinaten der Eckpunkte liegen.

3. Gegeben ist ein Würfel ABCDEFGH mit der Kantenlänge 4 durch die Punkte $A(0\mid 0\mid 0)$, $B(4\mid 0\mid 0)$, $C(4\mid 4\mid 0)$, $D(0\mid 4\mid 0)$ und $E(0\mid 0\mid 4)$.

a) Geben Sie die Koordinaten der Punkte F, G und H an.

$F(4\mid 0\mid 4)$, $G(4\mid 4\mid 4)$, $H(0\mid 4\mid 4)$

b) Gegeben ist die Ebene E_1 mit $E_1: x+2y=6$. Zeichnen Sie die Schnittfläche des Würfels mit dieser Ebene.



c) Gegeben ist die Ebene E_2 mit $E_2: x+y+z=6$. Zeichnen Sie die Schnittfläche des Würfels mit dieser Ebene.