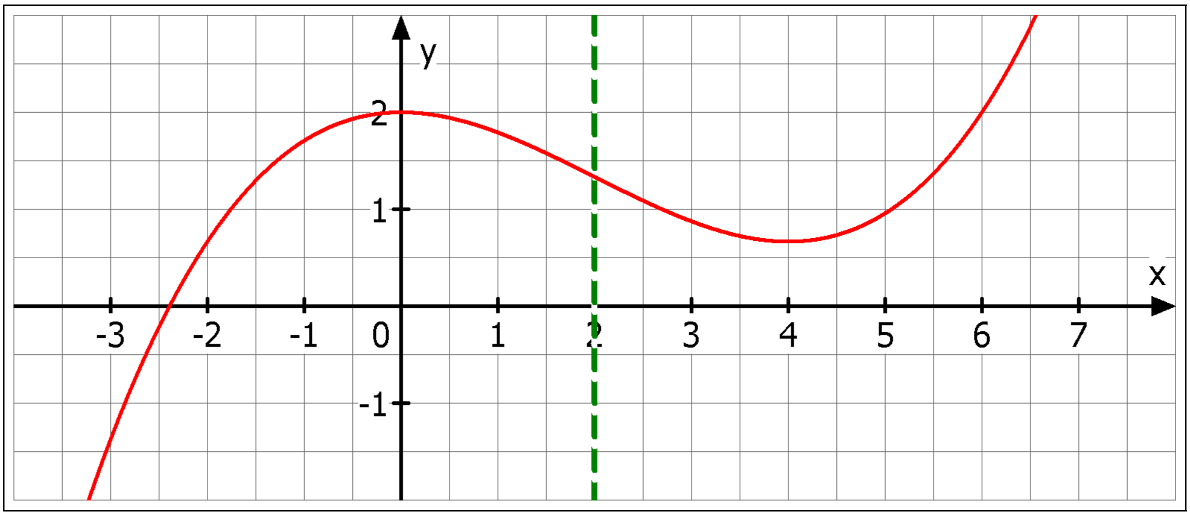
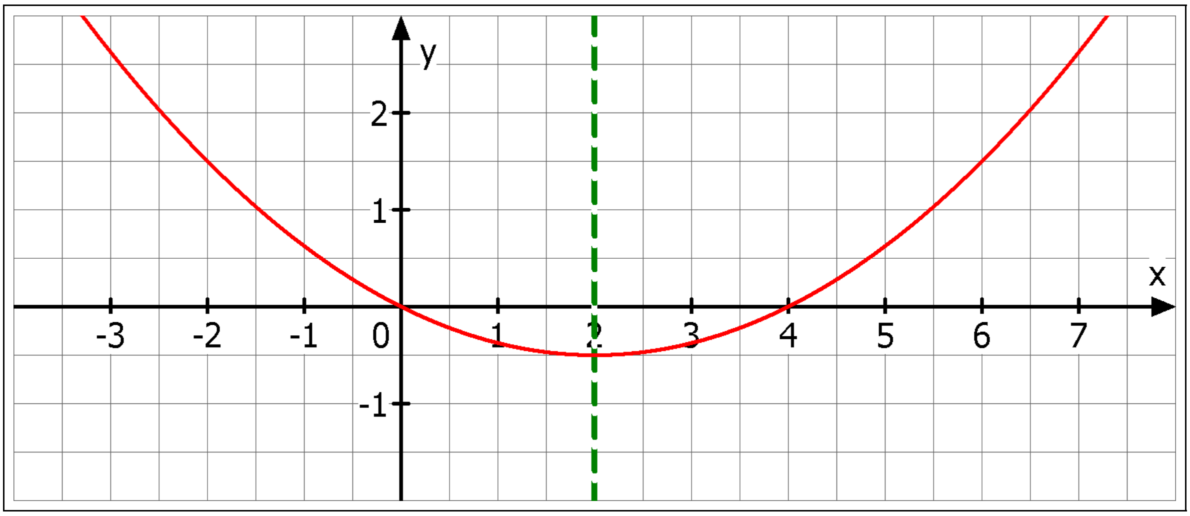
Wendestellen und Wendepunkte

Definition: Ändert die Funktion an einer Stelle x_0 ihr Krümmungsverhalten, so nennt man den Punkt $W(x_0;y_0)$ Wendepunkt des Graphen von f und die Stelle x_0 Wendestelle.

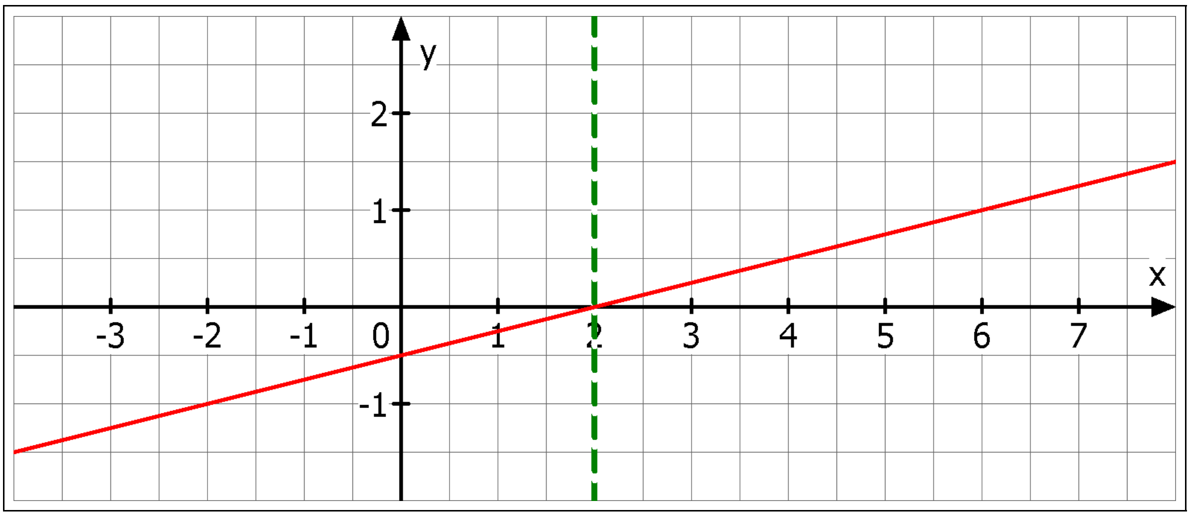
Graph der Funktion:



Graph der 1. Ableitung:



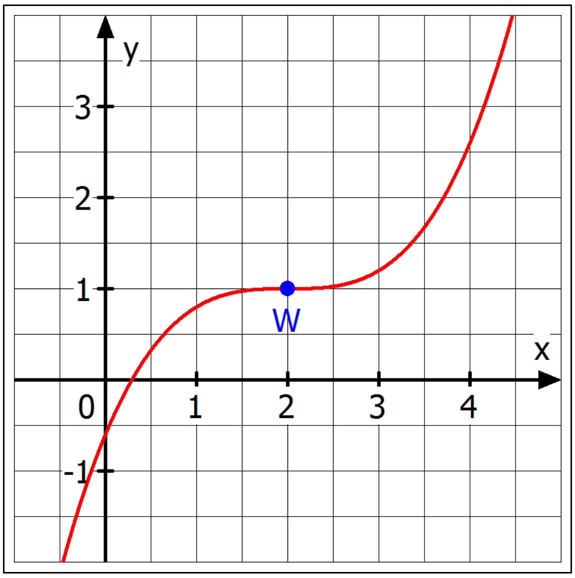
Graph der 2. Ableitung:



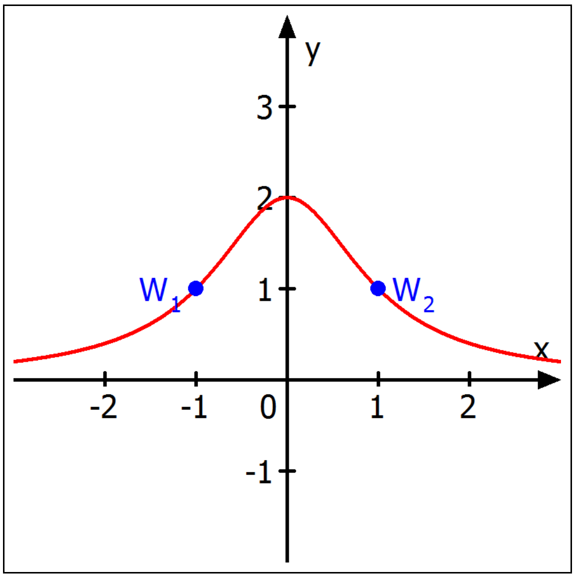
Bemerkung: Es gilt $f''(x) > 0$ für $x < x_0$ und $f''(x) < 0$ für $x > x_0$ oder es gilt $f''(x)<0$ für $x < x_0$ und $f''(x) > 0$ für $x > x_0$.

Wendestellen und Wendepunkte

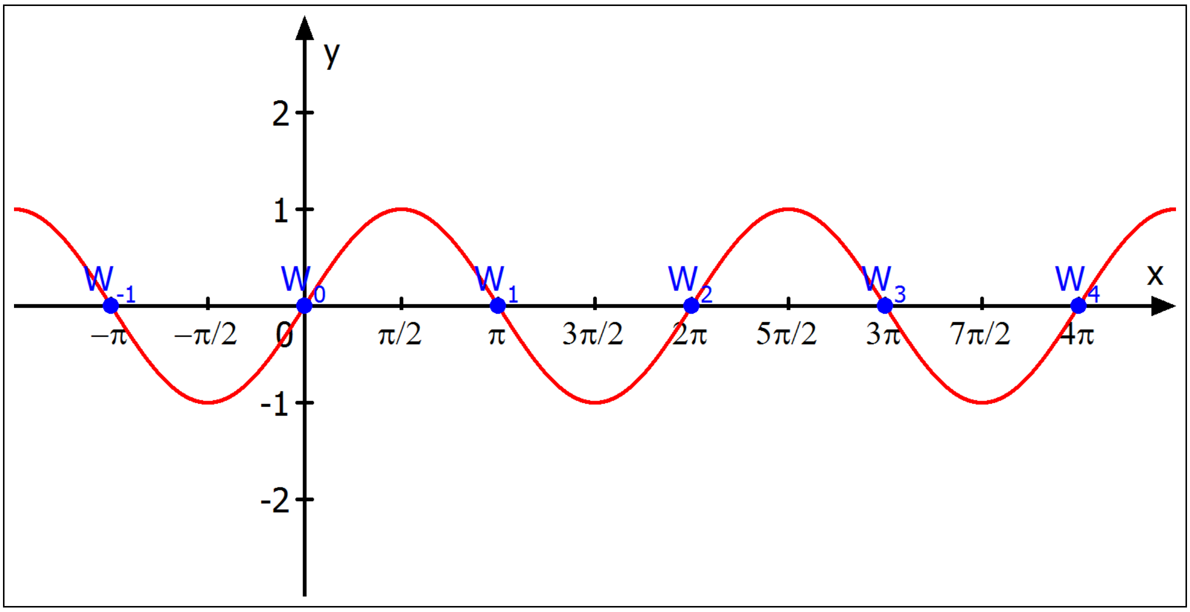
Beispiele:



Horizontalwendepunkt



2 Wendepunkte



unendlich viele Wendepunkte

Satz: Ist die Funktion f 2-mal differenzierbar und besitzt f' an der Stelle x_0 ein lokales Extremum, so hat die Funktion f eine Wendestelle x_0.

Begründung: Besitzt die 1. Ableitung einen Hochpunkt, dann ist die 2. Ableitung für $x < x_0$ positiv und für $x > x_0$ negativ, da die 2. Ableitung den Anstieg der 1. Ableitung beschreibt. Demzufolge muss die 2. Ableitung für $x = x_0$ den Wert 0 annehmen.

Satz: Ist die Funktion f 3-mal differenzierbar und gilt $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, so hat die Funktion f eine Wendestelle x_0.

Definition: Gilt zusätzlich $f'(x_0) = 0$, dann nennt man den Wendepunkt auch Horizontalwendepunkt, Terrassenpunkt oder Sattelpunkt.

Wendestellen und Wendepunkte

Beispiel:
Auftrag: Berechnen Sie die Wendepunkte und untersuchen Sie, ob es sich um Horizontalwendepunkte handelt.

Ableitungen:

$$f(x) = -\frac{3}{8}x^4 + 9x^2 + 24x + 22$$

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^3 + 18x + 24$$

$$f''(x) = -\frac{9}{2}x^2 + 18$$

$$f'''(x) = -9x$$

Wendestellen:

$$f''(x) = 0$$

$$18 = \frac{9}{2}x^2$$

$$4 = x^2$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 2$$

Nachweis:

$$f'''(-2) = 18 \neq 0$$

$$f'''(2) = -18 \neq 0$$

Wendepunkte:

$$f(-2) = -6 + 36 - 48 + 22 = 4 \Rightarrow W_1(-2 \mid 4)$$

$$f(2) = -6 + 36 + 48 + 22 = 100 \Rightarrow W_2(2 \mid 100)$$

Untersuchung auf Horizontalwendepunkte:

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^3 + 18x + 24$$

$$f'(-2) = 12 - 36 + 24 = 0$$

$$f'(2) = -12 + 36 + 24 = 48$$

Der erste Wendepunkt ist sogar ein Horizontalwendepunkt.

Wendestellen und Wendepunkte

Aufgabe 1:
Berechnen Sie den Wendepunkt und untersuchen Sie, ob es ein Horizontalwendepunkt ist.

Ableitungen:

$$f(x) = \left(1+\frac{x}{2}\right)\cdot e^{-2x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot e^{-2x} + \left(1+\frac{x}{2}\right)\cdot(-2)\cdot e^{-2x}$$

$$= \left(-\frac{3}{2}-x\right)\cdot e^{-2x}$$

$$f''(x) = -1\cdot e^{-2x} + (3+2x)\cdot e^{-2x}$$

$$= (2+2x)\cdot e^{-2x}$$

$$f'''(x) = (-2-4x)\cdot e^{-2x}$$

Wendestellen:

$$f''(x) = 0$$

$$2+2x = 0$$

$$2x = -2$$

$$x = -1$$

$$x_1 = -1$$

Nachweis:

$$f'''(x) = (-2-4x)\cdot e^{-2x}$$

$$f'''(-1) = 2\cdot e^{2} \neq 0$$

Wendepunkt:

$$f(x) = \left(1+\frac{x}{2}\right)\cdot e^{-2x}$$

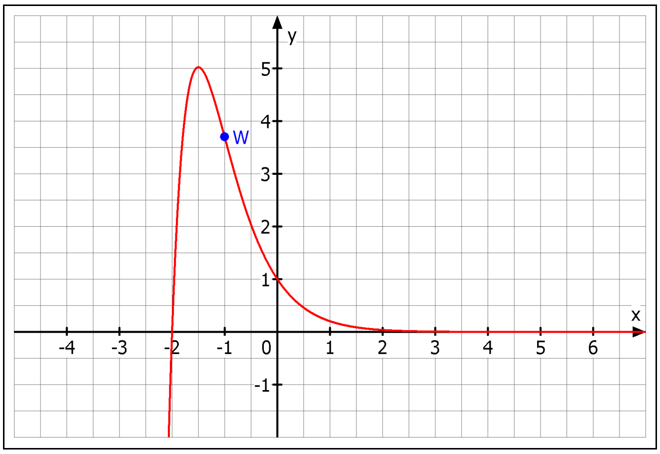
$$f(-1) = \frac{1}{2}\cdot e^{2} \Rightarrow W_1\left(-1 \mid \frac{e^2}{2}\right)$$

Untersuchung auf Horizontalwendepunkte:

$$f'(-1) = \left(-\frac{3}{2}+1\right)\cdot e^{2}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{2} \neq 0$$

Der Wendepunkt ist kein Horizontalwendepunkt.



Wendestellen und Wendepunkte

Aufgabe 2:
Gesucht ist eine Funktion f mit dem Horizontalwendepunkt W(3|4).

Tipp: Man nehme eine bekannte Funktion mit einem Horizontalwendepunkt und verschiebe diese geeignet.

$$f(x) = (x-3)^3 + 4$$

Aufgabe 3:

Ermitteln Sie den maximalen Anstieg.

$$f(x) = -\frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{2}x^4$$
$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 2x^3$$
$$f''(x) = -2x^3 + 6x^2$$

Wendestellen:

$$x^2(-2x+6) = 0$$
$$x_1 = 0$$
$$x_2 = 3$$

$$f'(3) = -\tfrac{1}{2} \cdot 81 + 2 \cdot 27 = -40{,}5 + 54 = 13{,}5$$

Aufgabe 4:

Berechnen Sie den Wendepunkt und weisen Sie nach, dass es sich um einen Wendepunkt handelt.

$f(x) = x^2 \cdot \ln(\tfrac{x}{4})$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \cdot \ln\left(\frac{x}{4}\right) + x^2 \cdot \frac{4}{x} \cdot \frac{1}{4} \\ &= 2x \cdot \ln\left(\frac{x}{4}\right) + x \\ f''(x) &= 2 \cdot \ln\left(\frac{x}{4}\right) + 2x \cdot \frac{4}{x} \cdot \frac{1}{4} + 1 \\ &= 2 \cdot \ln\left(\frac{x}{4}\right) + 3 \\ f'''(x) &= 2 \cdot \frac{4}{x} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{x} \end{aligned}$$

Wendestellen:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ 2 \cdot \ln\left(\frac{x}{4}\right) + 3 &= 0 \\ \ln\left(\frac{x}{4}\right) &= -\frac{3}{2} \\ \frac{x}{4} &= e^{-\frac{3}{2}} \\ x_W &= 4 \cdot e^{-\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Nachweis:

$$\begin{aligned} f'''(x) &= \frac{2}{x} \\ f'''\left(4 \cdot e^{-\frac{3}{2}}\right) &= \frac{2}{4 \cdot e^{-\frac{3}{2}}} \neq 0 \end{aligned}$$

Wendepunkt:

$$\begin{aligned} f\left(4 \cdot e^{-\frac{3}{2}}\right) &= \left(4 \cdot e^{-\frac{3}{2}}\right)^2 \ln\left(\frac{4 \cdot e^{-\frac{3}{2}}}{4}\right) \\ &= 16 \cdot e^{-3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -24e^{-3} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{W\left(4 \cdot e^{-\frac{3}{2}} \mid -24e^{-3}\right)}}$$