Strukturregeln zum Differenzieren

Frage: Wie sieht es jetzt aus, wenn man Funktionen verknüpft und verkettet?

Ziel: Zunächst wollen wir die Summe, die Differenz und das Vielfache einer Funktion differenzieren.

Satz (Konstantenregel): Jede konstante Funktion $f(x) = c$ ist differenzierbar und es gilt:

$$f'(x) = 0 \,.$$

Satz (Faktorregel): Ist eine Funktion g(x) differenzierbar, so ist auch das k-fache $f(x) = k \cdot g(x)$ der Funktion differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x) = k \cdot g'(x) \,.$$

Bemerkungen:
1) Diese Regel sollte man eigentlich „Vielfachregel“ nennen.
2) Der Faktor k hängt nicht von x ab und bleibt beim Ableiten erhalten.

Beispiele:

(1)	$f(x) = -4 \cdot x^3$	$f'(x) = -12 \cdot x^2$
(2)	$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2$	$f'(x) = x$
(3)	$f(x) = 38 \cdot x^{53}$	$f'(x) = 2014 \cdot x^{52}$
(4)	$f(x) = 6 \cdot \sqrt{x}$	$f'(x) = 6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$
(5)	$f(x) = \frac{11}{x^2} = 11x^{-2}$	$f'(x) = -22x^{-3} = -\frac{22}{x^3}$

Satz (Summenregel): Sind zwei Funktionen u(x) und v(x) differenzierbar, so ist auch die Summe $f(x) = u(x) + v(x)$ der Funktionen differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x) = u'(x) + v'(x) \,.$$

Beispiele:

(1)	$f(x) = \sin x + \cos x$	$f'(x) = \cos x - \sin x$
(2)	$f(x) = e^x + \ln x$	$f'(x) = e^x + \frac{1}{x}$
(3)	$f(x) = x^3 + \frac{1}{x^3}$	$f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^4}$

Bemerkungen:
1) Diese Regel gilt für endlich viele Summanden.
2) Diese Regel gilt auch für Differenzen.

Satz (Differenzregel): Sind zwei Funktionen u(x) und v(x) differenzierbar, so ist auch die Differenz $f(x) = u(x) - v(x)$ der Funktionen differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x) = u'(x) - v'(x) \,.$$

Beispiele (gemischt):

(1)	$f(x) = 2\sin x - 3\cos x$	$f'(x) = 2\cos x - 3\sin x$
(2)	$f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x + 8$	$f'(x) = 15x^2 - 6x + 2$
(3)	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$
(4)	$f(x) = \frac{5}{x} + 3\sqrt{x}$	$f'(x) = -\frac{5}{x^2} + \frac{3}{2\sqrt{x}}$
(5) $\ast$	$f(x) = 6e^x + 6x^e$	$f'(x) = 6e^x + 6ex^{e-1}$