Lösungen der Probeklausur - Differentialrechnung

1. Radioaktivität

a) Funktionsgleichung:

$A(t) = 200,036 \cdot 10^6 \cdot 0,91699^t$

b) Halbwertszeit:

$\text{SolveN}(A(t) = 100 \cdot 10^6)$

$t = 8$

Die Halbwertszeit beträgt 8 Tage.

c) Wert unter 1000 Bq:

$\text{SolveN}(A(t) = 1000)$

$t = 140,85$

Nach etwa 141 Tagen ist die Aktivität unter 1000 Bq gesunken.

2. Symmetrische Brücke

a) Geben Sie den Definitionsbereich der Funktion f an. Ermitteln Sie eine Funktionsgleichung für die Funktion g.

$D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}; 0 \le x \le 25\}$

z.B.: $g(x) = 0,016 \cdot (x-50)^2$

b) Ermitteln Sie die Höhe der Brücke.

$f(25) = 10$ Die Höhe beträgt 10 m.

c) Koordinaten des Punktes F: $F(25 \mid 0)$

Funktionspunkt: $P(x \mid 0,016x^2)$

$d = \overline{FP}$

$d(x) = \sqrt{(x-25)^2 + (0,016x^2 - 0)^2}$

$\text{Min}: d_{min} = 8,09\text{m}$

Idee für die 11 m lange Strebe:

$11 = \sqrt{(x-25)^2 + (0,016x^2 - 0)^2}$

$\text{SolveN}\left(11 = \sqrt{(x-25)^2 + (0,016x^2)^2}\right)$

$x = 14,53$

$f(14,53) = 3,379$

Die Strebe ist am Punkt $P(14,53 \mid 3,379)$ befestigt.

Anstieg: $\tan\alpha = -\frac{3,379}{25-14,53} = 0,3227 \Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 17,9°}}$

Der Anstieg der 11m langen Strebe beträgt $-0,3227$.

Der Anstiegswinkel beträgt 17,9°.

Lösungen der Probeklausur - Differentialrechnung

3. Zwei Gemeinsamkeiten

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3 - x^2$.

Es gibt Geraden mit dem Anstieg $m = \frac{7}{4}$, die genau 2 gemeinsame Punkte mit dem Graphen der Funktion f besitzen.

Bestimmen Sie eine solche Geradengleichung und die beiden gemeinsamen Punkte.

Idee: Es muss sich um eine Tangente handeln, da es sonst nur 1 oder sogar 3 gemeinsame Punkte geben würde.

Ansatz für Berührungsstellen:

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

$$\frac{7}{4} = 3x^2 - 2x$$

$$0 = 3x^2 - 2x - \frac{7}{4}$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}$$

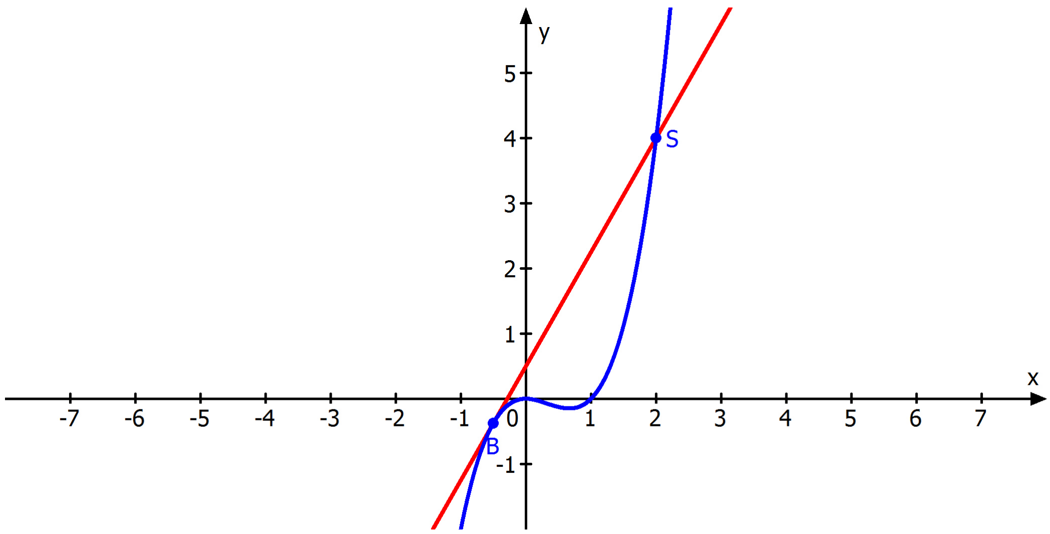
$$x_2 = \frac{7}{6}$$

Tangente mit GTR:

$$y = 1,75x + 0,5$$

$B(-0,5 \mid -0,375)$

$S(2 \mid 4)$



Lösungen der Probeklausur - Differentialrechnung

4. Hängebrücke

a) Ermitteln Sie den Abstand der Punkte A und B.

$A(20 \mid f(20)) \Rightarrow A(20 \mid 15)$

$B(40 \mid g(40)) \Rightarrow B(40 \mid 7{,}5)$

$$d = \sqrt{(40-20)^2 + (15-7{,}5)^2}$$

$$d = \underline{\underline{21{,}36\text{m}}}$$

b) Ermitteln Sie eine geeignete Funktionsgleichung für den Verlauf der Hängebrücke zwischen den Punkten A und B.

$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Lineares Gleichungssystem:

$p(20) = f(20) = 15 \Rightarrow 8000a + 400b + 20c + d = 15$

$p'(20) = f'(20) = -\frac{6}{5} \Rightarrow 1200a + 80b + c = -\frac{6}{5}$

$p(40) = g(40) = \frac{15}{2} \Rightarrow 64000a + 1600b + 40c + d = \frac{15}{2}$

$p'(40) = g'(40) = \frac{1}{2} \Rightarrow 4800a + 80b + c = \frac{1}{2}$

Lösung im EQUA-Modus:

$f(x) = \underline{\underline{\frac{1}{8000}x^3 + \frac{1}{32}x^2 - \frac{13}{5}x + \frac{107}{2}}}$