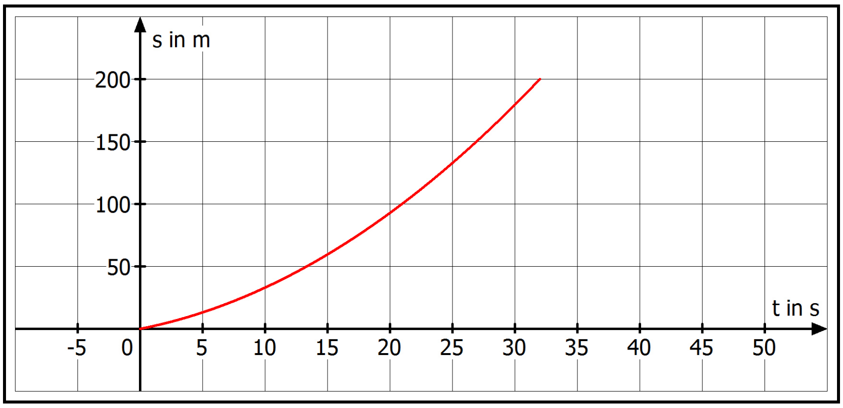
Physikalische Motivierung

Das Weg-Zeit-Diagramm eines K2 über 200 m kann näherungweise durch die Funktion $s(t) = 0,134\frac{m}{s^2}t^2 + 1,964\frac{m}{s}t$ beschrieben werden.

Wir betrachten zunächst den Graphen der Funktion.



Fragen: Nach welcher Zeit wird die 200-m-Marke erreicht.
Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreicht das Boot?
Welche Maximalgeschwindigkeit erreicht das Boot?

Die ersten beiden Fragen können mit dem GTR gelöst werden.

$$\text{GTR : XCAL} : Y = 200 \Rightarrow X = t = 31,994\text{s}$$

$$\bar{v} = \frac{200\text{m}}{31,994\text{s}} = 6,25\frac{\text{m}}{\text{s}} = 22,5\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Bei der dritten Frage wird es schon kniffliger. Wir müssten zunächst wissen, an welcher Stelle die maximale Geschwindigkeit erreicht wird. Da es sich um eine Parabel handelt, müsste das am Ende der Fall sein.

Schätzung: Wir berechnen Sie Geschwindigkeit zwischen der 31s und 31,994s

$$v_{max} \approx \frac{s(31,994\text{s}) - s(31\text{s})}{31,994\text{s} - 31\text{s}}$$

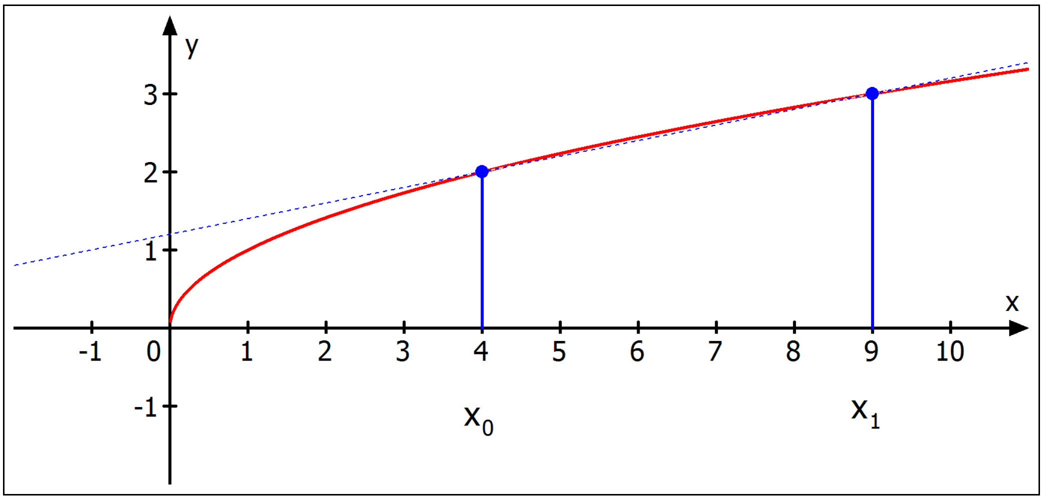
$$= \frac{200\text{m} - 189,658\text{m}}{0,994\text{s}} = \underline{\underline{10,404\frac{\text{m}}{\text{s}}}}$$

In Wirklichkeit ist diese Maximalgeschwindigkeit noch etwas höher. Die exakte Berechnung müssen wir auf später verschieben. Aber das ist genau die Frage. Wie kann man diese exakt berechnen?

Einführung in die Differentialrechnung

Geometrische Motivierung

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \sqrt{x}$. Wir suchen den Anstieg der Funktion an der Stelle $x_0 = 4$. Dazu berechnen wir zunächst Näherungswerte, sozusagen den Anstieg von Sekanten.



1. Näherungswert: Wir wählen $x_1 = 9$.
   Dann gilt für den Anstieg der Sekante. (siehe Abbildung)

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \\ &= \frac{3-2}{9-4} = \frac{1}{5} = 0{,}2 \end{aligned}$$

2. Näherungswert: Wir wählen $x_1 = 5$.
   Dann gilt für den Anstieg der Sekante.

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(5) - f(4)}{5-4} \\ &= \frac{\sqrt{5} - 2}{1} = \sqrt{5} - 2 \approx 0{,}2361 \end{aligned}$$

3. Näherungswert: Wir wählen $x_1 = 4{,}01$.
   Dann gilt für den Anstieg der Sekante.

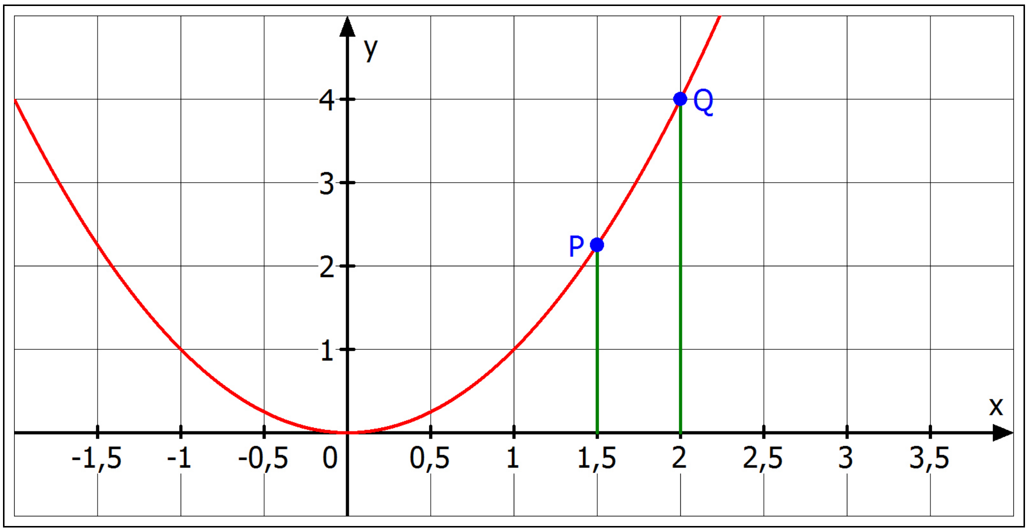
$$\begin{aligned} m &= \frac{f(4{,}01) - f(4)}{1{,}01 - 1} \\ &= \frac{\sqrt{4{,}01} - 2}{0{,}01} \approx 0{,}2498 \end{aligned}$$

Vermutung: Der Anstieg der der Tangente an der Stelle $x_0 = 4$ könnte 0,25 betragen.
Aber wie berechnet man diesen Anstieg?

Beispiel:
Jetzt werden wir konkret und lösen ein erstes Beispiel. Wir suchen den Anstieg der Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle $x_0 = 1,5$. Dazu führen wir eine etwas andere Schreibweise für x_1 ein.

$$x_1 = x_0 + h$$

Der Wert h ist dann wieder der Unterschied zwischen den beiden Argumenten.



Zunächst berechnen wir den Anstieg zwischen zwei Punkten $P(1,5 \mid f(1,5))$ und $Q(1,5+h \mid f(1,5+h))$. Dabei ist zu beachten, dass der Punkt P fest ist. Der Punkt Q ist variabel und hängt von h ab.

$$\begin{aligned} d(h) &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1,5+h)-f(1,5)}{(1,5+h)-1,5} = \frac{(1,5+h)^2-1,5}{h} \\ &= \frac{2,25+3h+h^2-2,25}{h} = \frac{3h+h^2}{h} \\ &= \frac{h(3+h)}{h} \\ &= 3+h \end{aligned}$$

Dieser Anstieg hängt damit auch von h ab. Jetzt lassen wir den Punkt Q in Richtung P wandern. Das heißt, wir müssen den Wert von h gegen 0 konvergieren lassen.

$$\lim_{h \to 0} (3+h) = 3+0 = 3$$

Damit haben wir nachgewiesen, dass die Funktion f an der Stelle $x_1 = 1,5$.
den Anstieg 3 besitzt. (Diese Zahl entspricht dem Anstieg der Tangente an dieser Stelle.)

Der Differenzen- und der Differentialquotient

Definition: Man nennt den Anstieg der Geraden durch die 2 Punkte $P(x_0 \mid f(x_0))$ und $P(x_0 + h \mid f(x_0 + h))$ einer Funktion in der Form

$$\boxed{d(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \quad \text{bzw.} \quad d(x) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

Differenzenquotient Funktion f(x) im Intervall $[x_0; x_1]$.

Definition: Man nennt die Funktion an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}} \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

existiert. Dieser Grenzwert heißt 1. Ableitung oder Differentialquotient der Funktion f(x) an der Stelle x_0.