LB: Grenzwerte und 1. Ableitung

1. Berechnen Sie die Grenzwerte der Funktion g im Unendlichen und geben Sie die Gleichungen der eventuell vorhandenen waagerechten Asymptoten an.

Umformung der Funktionsgleichung:

$$g(x) = \frac{(x+5)^2}{5x^2+4x+1} = \frac{x^2+10x+25}{5x^2+4x+1} = \frac{x^2\left(1+\frac{10}{x}+\frac{25}{x^2}\right)}{x^2\left(5+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}$$

Bestimmung der Grenzwerte:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{10}{x}+\frac{25}{x^2}}{5+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1+0+0}{5+0+0} = \frac{1}{5}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1+\frac{10}{x}+\frac{25}{x^2}}{5+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}} = \frac{1-0+0}{5-0+0} = \frac{1}{5}$$

Es existiert eine waagerechte Asymptote mit der Gleichung $y = \frac{1}{5}$.

2. Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$.

a) Weisen Sie nach, dass die Funktion h an der Stelle 2 eine Lücke besitzt.

Funktionswert: $f(2) = \frac{2-2}{4-4} = \frac{0}{0} = \text{n.d.}$

Grenzwert von links:

$$f(2-h) = \frac{2-h-2}{(2-h)^2-4} = \frac{-h}{4-4h+h^2-4} = \frac{-h}{-4h+h^2} = \frac{h(-1)}{h\cdot(-4+h)} = \frac{-1}{-4+h}$$

$$\lim_{h\to0}\left(\frac{-1}{-4+h}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = \frac{1}{4}$$

Grenzwert von rechts:

$$f(2+h) = \frac{2+h-2}{(2+h)^2-4} = \frac{h}{4+4h+h^2-4} = \frac{h}{4h+h^2} = \frac{h\cdot1}{h\cdot(4+h)} = \frac{1}{4+h}$$

$$\lim_{h\to0}\left(\frac{1}{4+h}\right) = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\x<2}} f(x) = \frac{1}{4}$$

Die Grenzwerte sind identisch.

2 b) Weisen Sie nach, dass die Funktion h an der Stelle -2 eine Polstelle b esitzt.

Funktionswert: $f(-2) = \frac{-2-2}{4-4} = \frac{-4}{0} = \text{n.d.}$

Grenzwert von links:

$$f(-2-h) = \frac{-2-h-2}{(-2-h)^2-4} = \frac{-4-h}{4+4h+h^2-4} = \frac{-4-h}{4h+h^2}$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{-4-h}{4h+h^2}\right) = \frac{-4}{0} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x) = -\infty$$

Grenzwert von rechts:

$$f(-2+h) = \frac{-2+h-2}{(-2+h)^2-4} = \frac{-4+h}{4-4h+h^2-4} = \frac{-4+h}{h(-4+h)}$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{-4+h}{h(-4+h)}\right) = \frac{-4}{-0} = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x) = +\infty$$

Die Funktionswerte wachsen bzw. fallend unbeschränkt.

2 c) Weisen Sie nach, dass die Funktion h an der Stelle 1 stetig ist.

Funktionswert: $f(1) = \frac{1-2}{1-4} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

Grenzwert von links:

$$f(1-h) = \frac{1-h-2}{(1-h)^2-4} = \frac{-1-h}{-3-2h+h^2}$$

$$\lim_{h\to 0}(\ldots) = \frac{-1-0}{-3-0+0} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = \frac{1}{3}$$

Grenzwert von rechts:

$$f(1+h) = \frac{1+h-2}{(1+h)^2-4} = \frac{-1+h}{-3+2h+h^2}$$

$$\lim_{h\to 0}(\ldots) = \frac{-1+0}{-3+0+0} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = \frac{1}{3}$$

Die beiden Grenzwerte und der Funktionswert sind identisch.

3. Berechnen Sie den Differentialquotienten von f an der Stelle x_0 mit Hilfe des Differenzenquotienten.

$$f(x) = x^2 + 5$$

Differenzenquotient:

$$d(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
$$= \frac{(x_0 + h)^2 + 5 - (x_0^2 + 5)}{h} = \frac{x_0^2 + 2x_0 h + h^2 + 5 - x_0^2 - 5}{h}$$
$$= \frac{2x_0 h + h^2}{h} = \frac{h \cdot (2x_0 + h)}{h \cdot 1}$$
$$= 2x_0 + h$$

Differentialquotient:

$$\lim_{h \to 0} (2x_0 + h) = 2x_0 + 0 = 2x_0$$
$$f'(x_0) = \underline{\underline{2x_0}}$$

4. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$.

a) Berechnen Sie den Anstieg der Sekante durch die Punkte $P(1 \mid f(1))$ und $Q(3 \mid f(3))$.

$$m = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{\frac{1}{3} - 1}{2} = \frac{-\frac{2}{3}}{2}$$
$$= \underline{\underline{-\frac{1}{3}}}$$

b) Bestimmen Sie den Anstieg der Tangente an der Stelle $x_0 = 2$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$
$$m = f'(2) = \underline{\underline{-\frac{1}{4}}}$$

c) Untersuchen Sie, ob es Tangenten an den Graphen von f mit dem dem Anstieg -100 gibt.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} = -100$$
$$x^2 = \frac{1}{100}$$
$$x = \pm\frac{1}{10}$$

Ja, es gibt sogar 2 Tangenten an den Stellen 0,1 und -0,1.