Die Kettenregel

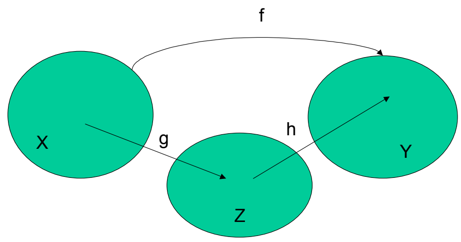
Folgende Fragen sollen in diesem Abschnitt behandelt werden:
1) Was sind verkettete Funktionen?
2) Wie kann man diese Funktionen ableiten?
3) Wann verstehe ich endlich, worum es hier eigentlich geht? (Beispiele)

(1) Was sind verkettete Funktionen?

Wiederholung: *Eine Funktion ist eine eindeutige Abbildung von einer Menge X auf eine Menge Y.*

Problem: Man stelle sich 2 Funktionen vor: Die erste Funktion g bildet von der Menge X auf die Menge Z ab. Eine zweite Funktion h bildet von der Menge Z auf die Menge Y ab. Kann man dann eine Funktion finden, die direkt von der Menge X auf die Menge Y abbildet?

$$
\begin{aligned}
h:&\ X \to Z\\
a:&\ Z \to Y\\
\\
f:&\ X \to Y\ ?
\end{aligned}
$$



Beispiel: Die Menge X sei die Menge der reellen Zahlen.
Die Funktion g sei $g(x) = x^2 + 1$.
Die Funktion h sei $h(x) = x^3$.
Die Funktion nimmt also ein Element aus Z und berechnet die Kubikzahl.

$$
\begin{array}{llcl@{\qquad}llcl}
g: & 2 & \mapsto & 5 & h: & 5 & \mapsto & 125\\
g: & -1 & \mapsto & 2 & h: & 2 & \mapsto & 8\\
g: & -\frac{1}{3} & \mapsto & \frac{10}{9} & h: & \frac{10}{9} & \mapsto & \frac{1000}{729}
\end{array}
$$

Wie sieht nun die Funktion aus, die direkt von X auf Y abbildet?

$$
\begin{array}{llcl}
f: & 2 & \mapsto & 125\\
 & -1 & \mapsto & 8\\
 & -\frac{1}{3} & \mapsto & \frac{1000}{729}
\end{array}
$$

... grübel ... grübel ...

$$f: \qquad x \mapsto x^2+1 \mapsto (x^2+1)^3$$

Also lautet die Funktion: $\quad f: \quad x \mapsto (x^2+1)^3$ oder $f(x) = (x^2+1)^3$

Man könnte f(x) als Verkettung von g und h ansehen:

$$f: \qquad f(x) = h(g(x))$$

Die Funktion h wird also auf die Funktion h angewendet.
Man sagt: g ist die innere Funktion und h die äußere Funktion.

Beispiele für verkettete Funktionen:

	innere	äußere
$f(x)=\sqrt{2x+3} \Rightarrow$	$g(x)=2x+3$	$h(x)=\sqrt{x}$
$f(x)=\sin(x^2) \Rightarrow$	$g(x)=x^2$	$h(x)=\sin x$
$f(x)=\frac{1}{x^2+9} \Rightarrow$	$g(x)=x^2+9$	$h(x)=\frac{1}{x}$
$f(x)=e^{2x} \Rightarrow$	$g(x)=2x$	$h(x)=e^x$
$f(x)=\ln(5-x) \Rightarrow$	$g(x)=5-x$	$h(x)=\ln x$

(2) Wie kann man diese Funktionen ableiten?

Satz (Kettenregel): Ist die Funktion g an der Stelle x und die Funktion h an der Stelle g(x) differenzierbar (und stetig), dann ist auch die Verkettung f(x) = h(g(x)) an der Stelle x differenzierbar und es gilt:

$$\boxed{f'(x)=g'(x)\cdot h'(g(x))}\ .$$

Wenn bis jetzt alles unklar war, kommt jetzt ein erlösendes Beispiel.

Bemerkung:
Man muss also die Ableitung der inneren Funktion mit der Ableitung der äußeren Funktion multiplizieren. Dabei muss man die innere Funktion wieder in die äußere Ableitung einsetzen.
Wir werden später dazu einfach sagen: *„Ableitung der inneren Funktion mal Ableitung der äußeren Funktion"*

(3) Beispiele und Übungen

Beispiele: Potenzfunktionen

$$f(x)=(2x+1)^8 \Rightarrow \begin{array}{l} g'(x)=2 \\ h'(g)=8g^7 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} f'(x)=2\cdot 8(2x+1)^7 \\ f'(x)=16\cdot(2x+1)^7 \end{array}$$

$$f(x)=(e^x+1)^5 \Rightarrow \begin{array}{l} g'(x)=e^x \\ h'(g)=5g^4 \end{array} \Rightarrow f'(x)=e^x\cdot 5(e^x+1)^4$$

$$f(x)=\frac{1}{(3x-5)^2}=(3x-5)^{-2} \Rightarrow \begin{array}{l} g'(x)=3 \\ h'(g)=-2g^{-3} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} f'(x)=3\cdot(-2)(3x-5)^{-3} \\ f'(x)=-\frac{6}{(3x-5)^3} \end{array}$$

$$f(x)=\frac{1}{mx+n}=(mx+n)^{-1} \Rightarrow \begin{array}{l} g'(x)=m \\ h'(g)=-1g^{-2} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} f'(x)=m\cdot(-1)(mx+n)^{-2} \\ f'(x)=-\frac{m}{(mx+n)^2} \end{array}$$

Beispiele: Exponentialfunktionen

$$f(x)=e^{3x} \Rightarrow g'(x)=3 \Rightarrow f'(x)=3\cdot e^{3x}$$
$$h'(g)=e^{g}$$

$$f(x)=e^{x^2} \Rightarrow g'(x)=2x \Rightarrow f'(x)=2x\cdot e^{x^2}$$
$$h'(g)=e^{g}$$

$$f(x)=e^{-x} \Rightarrow g'(x)=-1 \Rightarrow f'(x)=-e^{-x}$$
$$h'(g)=e^{g}$$

$$f(x)=e^{\sin x} \Rightarrow g'(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=\cos x\cdot e^{\sin x}$$
$$h'(g)=e^{g}$$

$$f(x)=e^{ax^2+bx+c} \Rightarrow g'(x)=2ax+b \Rightarrow f'(x)=(2ax+b)\cdot e^{ax^2+bx+c}$$
$$h'(g)=e^{g}$$

Beispiele: Logarithmusfunktionen

$$f(x)=\ln(x^2+1) \Rightarrow g'(x)=2x \Rightarrow f'(x)=2x\cdot\tfrac{1}{x^2+1}$$
$$h'(g)=\tfrac{1}{g} \qquad f'(x)=\tfrac{2x}{x^2+1}$$

$$f(x)=\ln(\cos x) \Rightarrow g'(x)=-\sin x \Rightarrow f'(x)=-\sin x\cdot\tfrac{1}{\cos x}$$
$$h'(g)=\tfrac{1}{g} \qquad f'(x)=-\tfrac{\sin x}{\cos x}=-\tan x$$

$$f(x)=\ln(0,03x+0,02) \Rightarrow g'(x)=0,03 \Rightarrow f'(x)=0,03\cdot\tfrac{1}{0,03x+0,02}$$
$$h'(g)=\tfrac{1}{g} \qquad f'(x)=\tfrac{0,03}{0,03x+0,02}=\tfrac{3}{3x+2}$$

$$f(x)=\ln(ax^2+bx+c) \Rightarrow g'(x)=2ax+b \Rightarrow f'(x)=\tfrac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$$
$$h'(g)=\tfrac{1}{g}$$

Beispiele: Wurzelfunktionen

$$f(x)=\sqrt{x^2+1} \Rightarrow g'(x)=2x \Rightarrow f'(x)=2x\cdot\tfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}$$
$$h'(g)=\tfrac{1}{2\sqrt{g}} \qquad f'(x)=\tfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f(x)=\sqrt{6\cdot e^x-1} \Rightarrow g'(x)=6\cdot e^x \Rightarrow f'(x)=6\cdot e^x\cdot\tfrac{1}{2\sqrt{5\cdot e^x-1}}$$
$$h'(g)=\tfrac{1}{2\sqrt{g}} \qquad f'(x)=\tfrac{3e^x}{\sqrt{5\cdot e^x-1}}$$

$$f(x)=\sqrt{\ln x} \Rightarrow g'(x)=\tfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=\tfrac{1}{2x\cdot\sqrt{\ln x}}$$
$$h'(g)=\tfrac{1}{2\sqrt{g}}$$

Zum Knobeln: Ganz schön schwierig?

Es gibt natürlich auch Funktionen, die dreimal verkettet sind. Wie könnten hier die Ableitungen aussehen?

a) $f(x)=\sqrt{\sin(2x)}$ b) $f(x)=\ln(\cos(x^2))$ c) $f(x)=\ln(\ln(\ln x))$

Das war's erst einmal.