Lösungen: Anwendungen zur Differentialrechnung (ohne Hilfsmitteln)

1. Berechnen Sie jeweils die 2. Ableitung der folgenden Funktionen mit Hilfe der Ableitungsregeln.

a) $f_1(x) = mx + n$
$f_1'(x) = m$
$f_1''(x) = 0$

b) $g_1(x) = \frac{1}{10}e^{-5x}$
$g_1'(x) = -\frac{1}{2}e^{-5x}$
$g_1''(x) = \frac{5}{2}e^{-5x}$

c) $h_1(x) = 3x \cdot \sin x$
$h_1'(x) = 3 \cdot \sin x + 3x \cdot \cos x$
$h_1''(x) = 3 \cdot \cos x + 3 \cdot \cos x + 3x \cdot (-\sin x)$
$h_1''(x) = 6 \cdot \cos x - 3x \cdot \sin x$

a) $f_2(x) = 2x^4 + 4x^2$
$f_2'(x) = 8x^3 + 8x$
$f_2''(x) = 24x^2 + 8$

b) $g_2(x) = \frac{1}{2}x + \sin(2x+1)$
$g_2'(x) = \frac{1}{2} + 2\cos(2x+1)$
$g_2''(x) = -4\sin(2x+1)$

c) $h_2(s) = s \cdot e^{3s}$
$h_2'(s) = e^{3s} + 3s \cdot e^{3s}$
$h_2'(s) = (1+3s) \cdot e^{3s}$
$h_2''(s) = 3e^{3s} + (1+3s) \cdot 3e^{3s}$
$h_2''(s) = (6+9s) \cdot e^{3s}$

2. Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^3 - 3x^2$.

a) Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.

$0 = x^3 - 3x^2 = x^2 \cdot (x-3)$

$x_1 = 0$

$x_2 = 3$

b) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und weisen Sie die Art der Extrempunkte nach.

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f''(x) = 6x - 6$

Extremstellen:

$3x^2 - 6x = 0$

$x(3x-6) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = 2$

Nachweis:

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$

$f''(2) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$

Punkte:

$f(0) = 0 - 0 = 0$

$\underline{\underline{H(0 \mid 0)}}$

$f(2) = 8 - 3 \cdot 4 = -4$

$\underline{\underline{T(2 \mid -4)}}$

c) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Funktion.

konvex:

$f''(x) > 0$

$6x - 6 > 0$

$6x > 6$

$x > 1$

konkav:

$f''(x) < 0$

$6x - 6 < 0$

$6x < 6$

$x < 1$

Für $x > 1$ ist die Funktion f konvex gekrümmt.

Für $x < 1$ ist die Funktion f konkav gekrümmt.

d) Berechnen Sie die Tangente von f an der Stelle $x_0 = 1$.

$$m = f'(1) = 3 - 6 = -3$$
$$f(1) = 1 - 3 = -2$$
$$B(1 \mid -2)$$
$$y = -3x + n$$
$$-2 = -3 + n$$
$$1 = n$$
$$\underline{\underline{y = -3x + 1}}$$

3. Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $h(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und weisen Sie die Art der Extrempunkte nach.

Extremstellen:

$$h'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$
$$0 = 3x^2 - 12x + 9$$
$$0 = x^2 - 4x + 3$$
$$x_{1;2} = 2 \pm \sqrt{4 - 3}$$
$$x_{1;2} = 2 \pm 1$$
$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 3$$

Nachweis:

$$h''(x) = 6x - 12$$
$$h''(1) = -6 < 0 \Rightarrow \text{Max.}$$
$$h''(3) = 18 - 12 = 6 > 0 \Rightarrow \text{Min.}$$

Extrempunkte:

$$f(1) = 1 - 6 + 9 - 4 = 0$$
$$f(3) = 27 - 54 + 27 - 4 = -4$$

$$\underline{\underline{H(1 \mid 0)}} \qquad \underline{\underline{T(3 \mid -4)}}$$

b) Berechnen Sie die Grenzwerte von f im Unendlichen.

$$\lim_{x \to +\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right) = +\infty(1 - 0 + 0 - 0) = \underline{\underline{+\infty}}$$
$$\lim_{x \to -\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right) = -\infty(1 + 0 + 0 + 0) = \underline{\underline{-\infty}}$$

Lösungen: Anwendungen zur Differentialrechnung (ohne Hilfsmitteln)

4. Gegeben ist die Funktion g mit der Gleichung $g(x) = x \cdot e^{4x}$.
   Berechnen Sie die lokalen Extremstelle und weisen Sie die Art der Extremstelle nach.

   Extremstellen:

   $$g'(x) = e^{4x} + x \cdot 4 \cdot e^{4x}$$
   $$g'(x) = (1+4x) \cdot e^{4x}$$
   $$0 = 1 + 4x$$
   $$x_1 = -\frac{1}{4}$$

   Nachweis:

   $$h''(x) = 4 \cdot e^{4x} + (1+4x) \cdot 4 \cdot e^{4x}$$
   $$h''(x) = (8+16x)e^{4x}$$
   $$h''\left(-\frac{1}{4}\right) = 4 \cdot e^{-1} > 0 \Rightarrow \text{Min.}$$

   Extrempunkt:

   $$g(x) = x \cdot e^{4x}$$
   $$g\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4} \cdot e^{-1}$$
   $$\underline{\underline{H\left(-\frac{1}{4} \mid -\frac{1}{4} \cdot e^{-1}\right)}}$$

5. Gegeben ist die Funktion p mit der Gleichung $p(x) = x^2$.
   Die Gerade s mit der Gleichung $s(x) = 6x - 9$ berührt den Graphen von p.
   Berechnen Sie die Berührungsstelle.

   $$p'(x) = s'(x)$$
   $$2x = 6$$
   $$\underline{\underline{x = 3}}$$

6. Gegeben ist das Weg-Zeit-Gesetz $s(t) = 0,3t^2 + 6t + 10$.
   a) Berechnen Sie die Geschwindigkeit zum Zeit $t = 5$.

   $$v(t) = s'(t) = 0,6t + 6$$
   $$v(5) = 0,6 \cdot 5 + 6 = \underline{\underline{9}}$$

   b) Berechnen Sie die Beschleunigung.

   $$a(t) = v'(t) = \underline{\underline{0,6}}$$