LB 2: Grenzwerte im Unendlichen

Aufgabe 1: Berechnen Sie die Grenzwerte im Unendlichen und geben Sie die Gleichung der Asymptoten an.

(a) $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}=\frac{\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{0}{1+0}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{-0}{1+0}=0$

(b) $g(x)=\frac{4x^2-1}{4x^3+1}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{4}{x}-\frac{1}{x^3}}{4+\frac{1}{x^3}}=\frac{0-0}{4+0}=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{4}{x}-\frac{1}{x^3}}{4+\frac{1}{x^3}}=\frac{-0+0}{4-0}=0$

(c) $h(x)=\frac{8x}{(2x+3)^2}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{8}{x}}{4+\frac{12}{x}+\frac{9}{x^2}}=\frac{0}{4+0+0}=0$

$h(x)=\frac{8x}{4x^2+12x+9}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{8}{x}}{4+\frac{12}{x}+\frac{9}{x^2}}=\frac{-0}{4-0+0}=0$

Die Asymptote ist für alle 3 Funktionen waagerecht: $y=0$.

Aufgabe 2: Berechnen Sie die Grenzwerte im Unendlichen und geben Sie die Gleichung der Asymptoten an.

(a) $f(x)=\frac{3x+5}{2x-1}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{5}{x}}{2-\frac{1}{x}}=\frac{3+0}{2-0}=\frac{3}{2}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{5}{x}}{2-\frac{1}{x}}=\frac{3-0}{2+0}=\frac{3}{2}$ $\qquad y=\frac{3}{2}$

(b) $g(x)=\frac{2x^2-7x+6}{6x^2+1}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}}{6+\frac{1}{x^2}}=\frac{2-0+0}{6+0}=\frac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{7}{x}+\frac{6}{x^2}}{6+\frac{1}{x^2}}=\frac{2+0+0}{6+0}=\frac{1}{3}$ $\qquad y=\frac{1}{3}$

(c) $h(x)=\frac{-8x^2}{(4x-1)^2}$ $\qquad \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-8}{16-\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{-8}{16-0+0}=-\frac{1}{2}$

$h(x)=\frac{-8x^2}{16x^2-8x+1}$ $\qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-8}{16-\frac{8}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{-8}{16+0+0}=-\frac{1}{2}$ $\qquad y=-\frac{1}{2}$

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Grenzwerte im Unendlichen.

(a) $f(x) = \frac{x^2+1}{3x}$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+\frac{1}{x}}{3} = \frac{\infty+0}{3} = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x+\frac{1}{x}}{3} = \frac{-\infty-0}{3} = -\infty$

(b) $g(x) = \frac{4x^3-1}{4x^2+1}$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x-\frac{1}{x^2}}{4+\frac{1}{x^2}} = \frac{\infty-0}{4+0} = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x-\frac{1}{x^2}}{4+\frac{1}{x^2}} = \frac{-\infty-0}{4+0} = -\infty$

(c) $h(x) = \frac{(2x-5)^2}{-8x}$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4x-20+\frac{25}{x}}{-8} = \frac{\infty-20+0}{-8} = -\infty$

$h(x) = \frac{4x^2-20x+25}{-8x}$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{4x-20+\frac{25}{x}}{-8} = \frac{-\infty-20-0}{-8} = +\infty$

Es gibt keine waagerechte, aber schräge Asymptoten.

**Aufgabe 4:* Berechnen Sie die Grenzwerte im Unendlichen und geben Sie die Asymptoten an, falls diese existieren.

Den Rechenweg sollte man selbst finden.

(a) $f(x) = \frac{(x+2)^2}{(2x+1)^2}$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{4}$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{1}{4}$ $\quad y = \frac{1}{4}$

(b) $g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \frac{a}{c}$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \frac{a}{c}$ $\quad y = \frac{a}{c}$

(c) $h(x) = \frac{2^x-1}{2^x+1}$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 1$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 1$ $\quad y = 1$