Grenzwerte von Funktionen im Unendlichen

Grenzwerte von gebrochenrationalen Funktionen

Definition: Eine Funktion mit der Gleichung $f(x)=\frac{a_m x^m+...+a_1 x+a_0}{b_n x^n+...+b_1 x+b_0}$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$ heißt gebrochenrationale Funktion.

Bemerkung: Für m < n heißt die Funktion echt gebrochenrationale Funktion, in allen anderen Fällen spricht man von unecht gebrochenrationalen Funktionen.

Beispiele:

echt gebrochenrational

$$f(x)=\frac{3x+5}{x^2+1}$$

$$f(x)=\frac{12x^3}{(x+1)^4}$$

unecht gebrochenrational

$$f(x)=\frac{3x^2-\frac{1}{2}x+1}{2x+1}$$

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$$

Rechenverfahren: Bei gebrochenrationalen Funktionen wird die Potenz mit dem größten Exponenten des Nenners sowohl im Nenner als auch im Zähler ausgeklammert. Anschließend wird der Grenzwert berechnet.

1. Beispiel (echt gebrochenrational, m < n):

$$f(x)=\frac{x^2-5x}{3x^4+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-5x}{3x^4+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\cdot\left(\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)}{x^4\cdot\left(3+\frac{1}{x^4}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^3}}{3+\frac{1}{x^4}}=\frac{0-0}{3+0}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5x}{3x^4+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4\cdot\left(\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)}{x^4\cdot\left(3+\frac{1}{x^4}\right)}=\frac{0+0}{3+0}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$$

Der Graph besitzt eine waagerechte Asymptote y = 0.

2. Beispiel (unecht gebrochenrational, m = n):

$$f(x)=\frac{3x^2+1}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\cdot\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{3+0}{1+0}=3$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\cdot\left(3+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{3+0}{1+0}=3$$

Der Graph besitzt eine waagerechte Asymptote y = 3.

3. Beispiel (m > n):

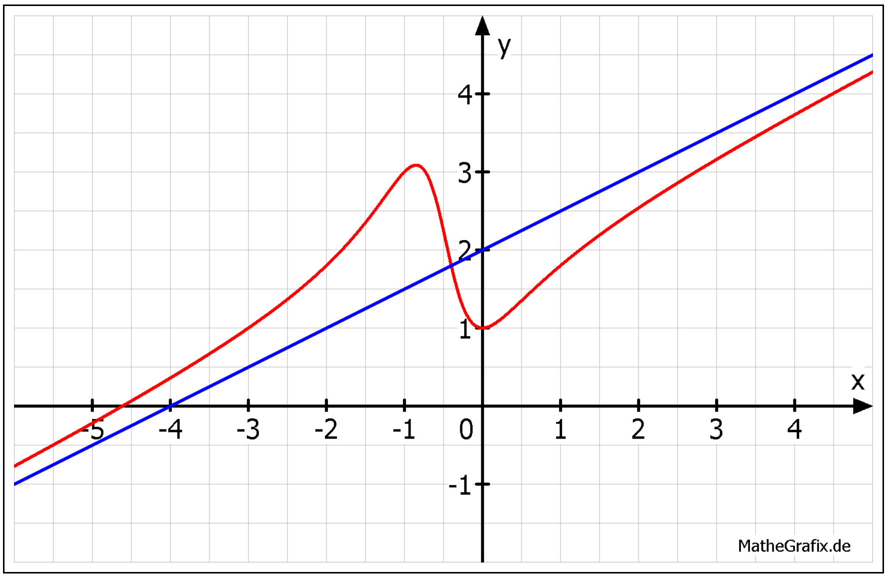
$$f(x) = \frac{x^3 + 5x^2 + 2x + 1}{2x^2 + 2x + 1}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \cdot \left(x + 5 + \frac{2}{x^1} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \cdot \left(2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x + 5 + \frac{2}{x^1} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{\infty + 5 + 0 + 0}{2 + 0 + 0} = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 \cdot \left(x + 5 + \frac{2}{x^1} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \cdot \left(2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x + 5 + \frac{2}{x^1} + \frac{1}{x^2}}{2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{-\infty + 5 - 0 + 0}{2 - 0 + 0} = -\infty$$

Nach der Betrachtung des Graphen könnte sich eine Vermutung ergeben.

Graph:



Der Graph könnte eventuell eine schräge Asymptote besitzen. Das ist zwar interessant, aber das können Sie gern wieder vergessen.