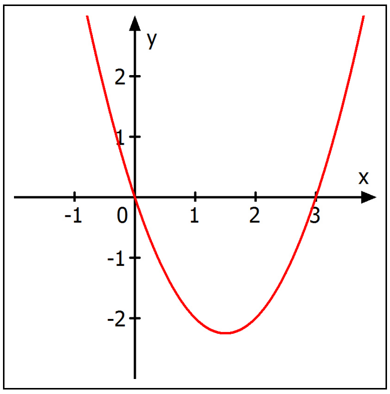
Grenzwerte von Funktionen im Unendlichen

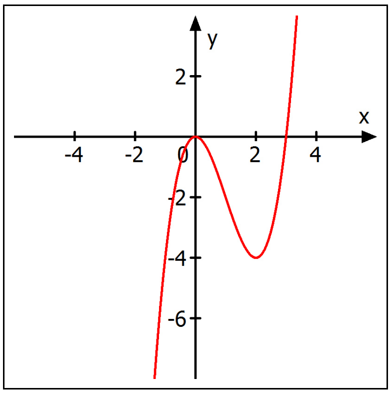
Ziel: Wir untersuchen zunächst nur eine Klasse von Funktionen mit ähnlichen Eigenschaften.

Beispiele für ganzrationale Funktionen ...

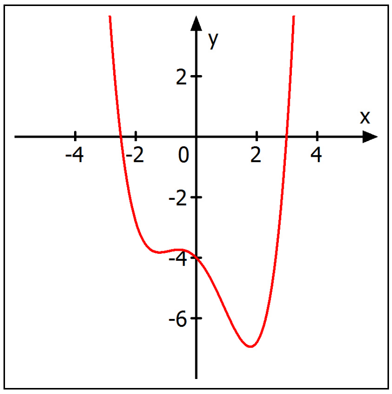
2. Grades



3. Grades



4. Grades



Grenzwerte von ganzrationalen Funktionen (Polynome)

Definition: Eine Funktion mit der Gleichung $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ mit $n \in \mathbb{N}$ heißt gebrochenrationale Funktion n-ten Grades.

Beispiele:

Funktionen ersten Grades

$f(x) = 3x + 5$

$f(x) = -\frac{1}{2}x$

Funktionen zweiten Grades

$f(x) = 3x^2 - \frac{1}{2}x + 1$

$f(x) = (x+1)^2$

Funktionen dritten Grades

$f(x) = -x^3 - 1$

$f(x) = (x-4)^3$

Funktionen vierten Grades

$f(x) = 3x^4 - 5x^3 + 1$

$f(x) = x^4 - x^2$

Bemerkung: Der höchste Exponent bezeichnet den Grad der Funktion.

Verfahren: Bei ganzrationalen Funktionen wird die Potenz mit dem größten Exponenten ausgeklammert. Anschließend wird der Grenzwert berechnet.

1. Rechenbeispiel:

$$f(x) = x^2 + 4x$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x^2\cdot\left(1+\frac{4}{x}\right)\right] = +\infty\cdot[1+0] = \underline{\underline{+\infty}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[x^2\cdot\left(1+\frac{4}{x}\right)\right] = +\infty\cdot[1-0] = \underline{\underline{+\infty}}$$

Die Funktion wächst also auf beiden Seiten unbeschränkt. Da es sich um eine nach oben geöffnete Parabel handelt, ist das Ergebnis nicht verwunderlich.

Grenzwerte von Funktionen im Unendlichen

2. Rechenbeispiel:

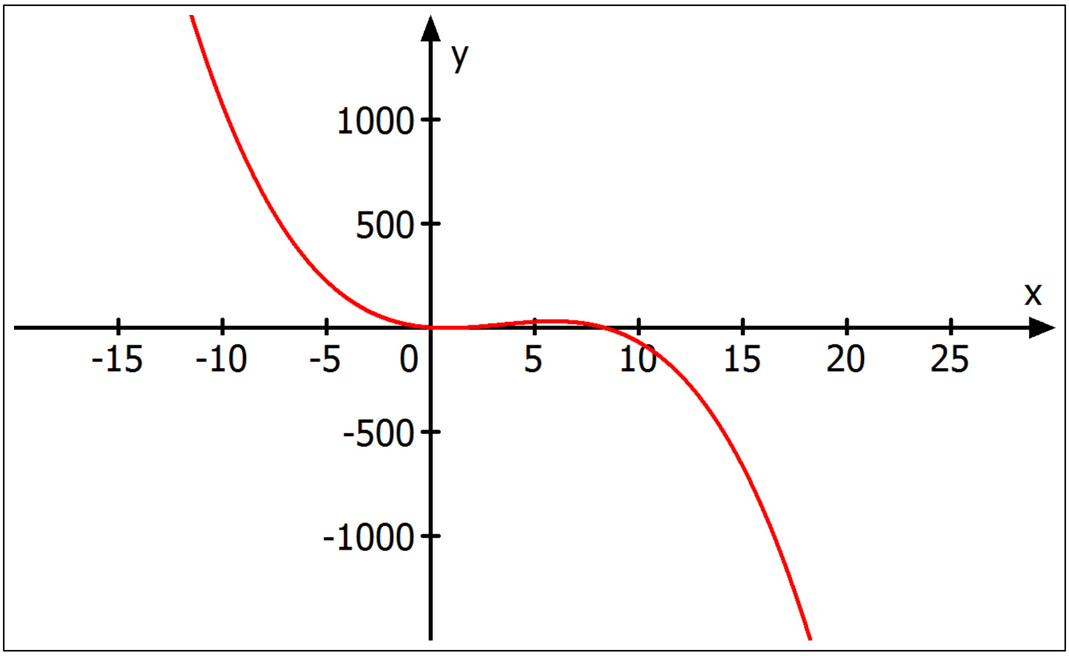
$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 5x^2 - 7x + 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left[x^3 \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)\right]$$

$$= +\infty \cdot \left[-\frac{1}{2} + 0 - 0 + 0\right] = \underline{\underline{-\infty}}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left[x^3 \cdot \left(-3 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)\right]$$

$$= -\infty \cdot [-3 + 0 - 0 - 0] = \underline{\underline{+\infty}}$$



Das sieht doch gut aus.