

Berechnung von Grenzwerten im Unendlichen

Bemerkung: Grundlage für die Berechnung von Grenzwerten ist der folgende Satz. Er setzt voraus, dass man schon einige grundlegende Grenzwerte kennt. Ziel ist es, die unbekanntes Grenzwerte auf bekannte Grenzwerte zurückzuführen.

Satz: Besitzen die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ im Unendlichen einen Grenzwert, so besitzen auch die Verknüpfungen $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ sowie $\frac{f(x)}{g(x)}$ einen Grenzwert im Unendlichen und es gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) + g(x)] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) + \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - g(x)] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) \cdot g(x)] &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)}{\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x)} \quad \text{mit } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) \neq 0\end{aligned}$$

1. Beispiel:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x} + 2^x + 5 \right] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x + \lim_{x \rightarrow -\infty} 5 \\ &= 0 + 0 + 5 = \underline{\underline{5}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{x} + 2^x + 5 \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x + \lim_{x \rightarrow +\infty} 5 \\ &= 0 + \infty + 5 = \underline{\underline{\infty}}\end{aligned}$$

2. Beispiel:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{6}{x^2} - \left(\frac{9}{10} \right)^x + \pi \right] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(6 \cdot \frac{1}{x^2} \right) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{9}{10} \right)^x + \lim_{x \rightarrow -\infty} \pi \\ &= 6 \cdot 0 - \infty + \pi = \underline{\underline{-\infty}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{6}{x^2} - \left(\frac{9}{10} \right)^x + \pi \right] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(6 \cdot \frac{1}{x^2} \right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{9}{10} \right)^x + \lim_{x \rightarrow +\infty} \pi \\ &= 0 + 0 + \pi = \underline{\underline{\pi}}\end{aligned}$$

Bemerkung: Es gibt allerdings Probleme beim Rechnen mit „unendlich“ und null. Einige Grenzwerte kann man berechnen, andere jedoch sind problematisch.

unproblematisch

$$\infty + 4 = \infty$$

$$\infty \cdot 4 = \infty$$

$$\infty + \infty = \infty$$

$$\infty \div 3 = \infty$$

problematisch

$$\infty - \infty = ?$$

$$\frac{\infty}{\infty} = ?$$

$$\infty \cdot 0 = ?$$

$$\frac{0}{0} = ?$$