Lösungsblatt - Grenzwerte von Funktionen an einer Stelle

1. Weisen Sie nach, dass die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 stetig ist.

$f(x) = \frac{6}{x} - 5 \qquad x_0 = 3$

Funktionswert: $f(3) = 2 - 5 = -3$

Grenzwert von links:

$$f(3-h) = \frac{6}{3-h} - 5$$

$$\lim_{h\to 0} f(3-h) = \frac{6}{3-0} - 5$$

$$\lim_{h\to 0} f(x) = -3$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = -3$$

Grenzwert von rechts:

$$f(3+h) = \frac{6}{3+h} - 5$$

$$\lim_{h\to 0} f(3+h) = \frac{6}{3+0} - 5 = -3$$

$$\lim_{h\to 0} f(x) = -3$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = -3$$

Die Grenzwerte sind identisch und stimmen mit dem Funktionswert überein.

2. Weisen Sie nach, dass die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 einen Sprung hat.

$f(x) = \frac{|x-3|}{x-3} \qquad x_0 = 3$

Funktionswert: $f(3) = \text{n.d.}$

Grenzwert von links:

$$f(3-h) = \frac{|3-h-3|}{3-h-3}$$

$$= \frac{|-h|}{-h} = \frac{h}{-h} = -1$$

$$\lim_{h\to 0} (-1) = -1$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = -1$$

Grenzwert von rechts:

$$f(3+h) = \frac{|3+h-3|}{3+h-3}$$

$$= \frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h\to 0} (1) = 1$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = 1$$

Die Grenzwerte sind verschieden. Die Funktion hat einen Sprung an der Stelle.

3. Weisen Sie nach, dass die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 eine Lücke besitzt.

$f(x) = \frac{x^2-9}{2x-6} \qquad x_0 = 3$

Funktionswert: $f(3) = \text{n.d.}$

$$f(3-h) = \frac{(3-h)^2 - 9}{2(3-h) - 6}$$

$$= \frac{9 - 6h + h^2 - 9}{6 - 2h - 6}$$

$$= \frac{-6h + h^2}{-2h} = \frac{h(-6+h)}{h \cdot (-2)}$$

$$= \frac{-6+h}{-2}$$

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{-6+h}{-2}\right) = 3$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x) = 3$$

$$f(3+h) = \frac{(3+h)^2 - 9}{2(3+h) - 6}$$

$$= \frac{9 + 6h + h^2 - 9}{6 + 2h - 6}$$

$$= \frac{6h + h^2}{2h} = \frac{h(6+h)}{2h}$$

$$= \frac{6+h}{2}$$

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{6+h}{2}\right) = 3$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x) = 3$$

Die Grenzwerte sind identisch.

4. Weisen Sie nach, dass die Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 eine Polstelle besitzt.

$f(x)=\frac{5}{x-3}$ $\quad x_0=3$ $\quad$ Funktionswert: $f(3)=$ n.d.

Grenzwert von links:

$$f(3-h)=\frac{5}{3-h-3}=\frac{5}{-h}$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{5}{-h}\right)=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)=-\infty$$

Grenzwert von rechts:

$$f(3+h)=\frac{5}{3+h-3}=\frac{5}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{5}{h}\right)=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x)=+\infty$$

Es handelt sich um eine Polstelle.

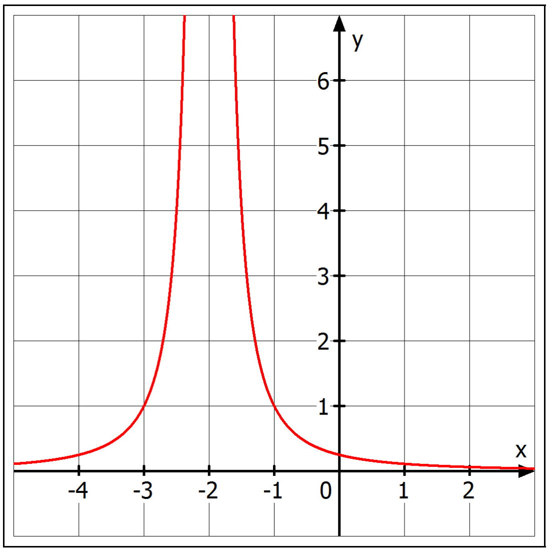
5. a) Bestimmen Sie die Vorschrift einer Funktion, die an der Stelle $x_0=1$ eine Polstelle besitzt.
$f(x)=\frac{1}{x-1}$

b) Bestimmen Sie die Vorschrift einer Funktion, die an der Stelle $x_0=-2$ stetig ist.
$f(x)=x^2$

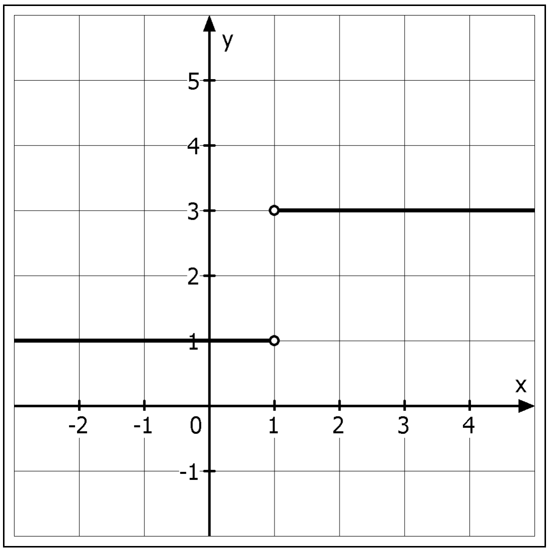
c) Bestimmen Sie die Vorschrift einer Funktion, die an der Stelle $x_0=\pi$ eine Lücke besitzt.
$f(x)=\frac{x-\pi}{x-\pi}$

d) Bestimmen Sie die Vorschrift einer Funktion, die an der Stelle $x_0=42$ einen Sprung besitzt.
$f(x)=\frac{x-42}{|x-42|}$

6. Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen.



$f(x)=\frac{1}{(x+2)^2}$



$f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}+2$