Der Differenzen- und der Differentialquotient

Ziel: Wir wollen die 1. Ableitung für einige ausgewählte Funktionen nachweisen.

Beispiel:
Funktion: $f(x) = x^2$ Stelle: $x_0 = 5$

Differenzenquotient:

$$\begin{aligned} d(h) &= \frac{f(5+h)-f(5)}{h} \\ &= \frac{(5+h)^2-25}{h} = \frac{25+10h+h^2-25}{h} \\ &= \frac{10h+h^2}{h} = \frac{h\cdot(10+h)}{h\cdot 1} \\ &= 10+h \end{aligned}$$

Differentialquotient:

$$\lim_{h\to 0}(10+h) = 10+0 = 10$$

$$f'(5) = \underline{\underline{10}}$$

Der Anstieg der Normalparabel an der Stelle $x_0 = 5$ beträgt 10.

Frage: Kann man das verallgemeinern? Wie groß ist der Anstieg an der Stelle x_0?

Beispiel:
Funktion: $f(x) = x^2$ Stelle: x_0

Differenzenquotient:

$$\begin{aligned} d(h) &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\ &= \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} = \frac{x_0^2+2x_0h+h^2-x_0^2}{h} \\ &= \frac{2x_0h+h^2}{h} = \frac{h\cdot(2x_0+h)}{h\cdot 1} \\ &= 2x_0+h \end{aligned}$$

Differentialquotient:

$$\lim_{h\to 0}(2x_0+h) = 2x_0+0 = 2x_0$$

$$f'(x_0) = \underline{\underline{2x_0}}$$

Der Anstieg der Normalparabel entspricht also dem Doppelten der Stelle x_0.

Der Differenzen- und der Differentialquotient

Beispiel:
Funktion: $f(x) = x^3$ Stelle: $x_0 = 1$

Differenzenquotient:

$$\begin{aligned} d(h) &= \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \\ &= \frac{(1+h)^3 - x_0^3}{h} = \frac{1+3h+3h^2+h^3-1}{h} \\ &= \frac{3h+3h^2+h^3}{h} = \frac{h\cdot(3+3h+h^2)}{h\cdot 1} \\ &= 3+3h+h^2 \end{aligned}$$

Differentialquotient:

$$\lim_{h\to 0}(3+3h+h^2) = 3+3\cdot 0+0^2 = 3$$

$$f'(1) = \underline{\underline{3}}$$

Der Anstieg der Funktion f mit $f(x) = x^3$ an der Stelle 1 ist also 3.

Beispiel:
Funktion: $f(x) = x^3$ Stelle: x_0

Differenzenquotient:

$$\begin{aligned} d(h) &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\ &= \frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h} = \frac{x_0^3+3x_0^2h+3x_0h^2+h^3-x_0^3}{h} \\ &= \frac{3x_0^2h+3x_0h^2+h^3}{h} = \frac{h\cdot(3x_0^2+3x_0h+h^2)}{h\cdot 1} \\ &= 3x_0^2+3x_0h+h^2 \end{aligned}$$

Differentialquotient:

$$\lim_{h\to 0}(3x_0^2+3x_0h+h^2) = 3x_0^2+0+0 = 3x_0^2$$

$$f'(x_0) = \underline{\underline{3x_0^2}}$$

Der Anstieg der Funktion f mit $f(x) = x^3$ entspricht also dem Dreifachen des Quadrates der Stelle x_0.

Der Differenzen- und der Differentialquotient

Beispiel:

Funktion: $f(x) = \frac{1}{x}$ Stelle: x_0

Differenzenquotient:

$$
\begin{aligned}
d(h) &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \\
&= \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} = \frac{\frac{x_0}{x_0(x_0+h)} - \frac{x_0+h}{x_0(x_0+h)}}{h} \\
&= \frac{\frac{x_0-(x_0+h)}{x_0(x_0+h)}}{h} = \frac{x_0-(x_0+h)}{x_0(x_0+h)} \cdot \frac{1}{h} \\
&= \frac{-h}{x_0(x_0+h)} \cdot \frac{1}{h} = \frac{-1}{x_0(x_0+h)}
\end{aligned}
$$

Differentialquotient:

$$
\lim_{h \to 0} \left(\frac{-1}{x_0(x_0+h)} \right) = \frac{-1}{x_0(x_0+0)} = -\frac{1}{x_0^2}
$$

$$
\underline{\underline{f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}}}
$$

Der Anstieg der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x}$ entspricht also dem Negativen des Quadrates des Funktionswertes $f(x_0)$.

Der Differenzen- und der Differentialquotient

Beispiel:

Funktion: $f(x) = \sqrt{x}$ Stelle: x_0

Differenzenquotient:

$$
\begin{aligned}
d(h) &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \\
&= \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} \cdot 1 \\
&= \frac{\sqrt{x_0+h} - \sqrt{x_0}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}}{\;} \\
&= \frac{x_0+h-x_0}{h \cdot \left(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}\right)} = \frac{h}{h \cdot \left(\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}}
\end{aligned}
$$

Differentialquotient:

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{x_0+h} + \sqrt{x_0}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x_0}}$$

$$f'(x_0) = \underline{\underline{\frac{1}{2\sqrt{x_0}}}}$$