

# 1. Differentialrechnung

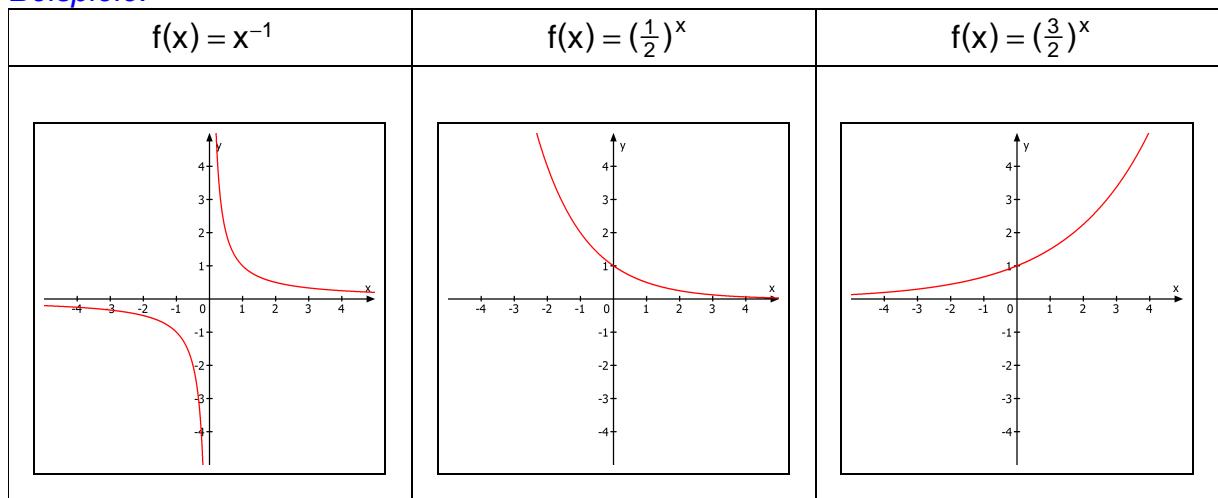
## Grenzwerte von Funktionen

### Wiederholung

**Auftrag:** Nennen Sie Funktionen, die waagerechte Asymptoten besitzen! Gibt es Funktionen, die zwei oder mehr waagerechte Asymptoten besitzen?

Antwort: Waagerechte Asymptoten besitzen insbesondere Potenzfunktionen mit negativen Exponenten und Exponentialfunktionen.

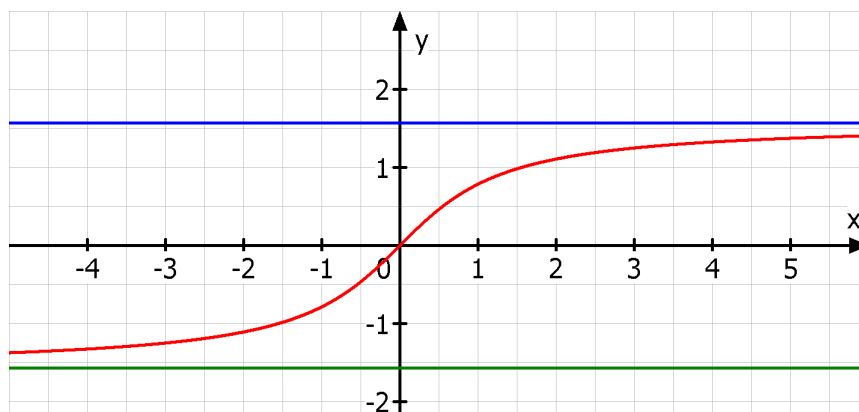
**Beispiele:**



**Antwort:** Eine Funktion kann zwei waagerechte Asymptoten besitzen, da sie für positive und negative sehr große Argumente verschiedene Grenzwerte besitzen kann. Ein Beispiel kennen Sie vielleicht? Oder können Sie einfach einen Graphen zeichnen?

**Beispiel:**

$$f(x) = \arctan x$$



**Beispiel:** Man kann auch eine zusammengesetzte Funktion konstruieren.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} - 3 & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{x^2} + 2 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

**Auftrag:** Beschreiben Sie den Graphen der Funktion.

### Grenzwerte von Funktionen im Unendlichen

**Definition:** Nähern sich die Funktionswerte  $f(x)$  für unbeschränkt wachsende Argumente  $x$  einem bestimmten Wert  $g$ , dann heißt die Zahl  $g$  Grenzwert der Funktion im Unendlichen für  $x \rightarrow +\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g$$

**Definition:** Nähern sich die Funktionswerte  $f(x)$  für unbeschränkt fallende Argumente  $x$  einem bestimmten Wert  $g$ , dann heißt die Zahl  $g$  Grenzwert der Funktion im Unendlichen für  $x \rightarrow -\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g$$

**Sprechweise:** „Limes von  $f(x)$  für  $x$  gegen unendlich ist  $g$ “.

**Bemerkungen:** Der Funktionsgraph besitzt eine waagerechte Asymptote mit der Gleichung  $y = g$ . Es können sogar zwei verschiedene Grenzwerte und damit zwei waagerechte Asymptoten existieren.

**Beispiele:**

**Auftrag:** Ermitteln Sie die Grenzwerte der Funktionen im Unendlichen. Nennen Sie die Asymptoten!

$$f_1(x) = 2^x$$

$$f_2(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x + 4$$

$$f_3(x) = 3 - \frac{1}{x}$$

$$f_4(x) = \frac{1}{x} - 3$$

$$f_5(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$f_6(x) = 0,8^x \cdot \sin x$$

$$f_7(x) = \sqrt{x}$$