Lösungsblätter: Anwendungen zur Differentialrechnung

1. Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \ln(x^2+1)$.

   a) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f.

   $f'(x) = 2x \cdot (x^2+1)^{-1} = \frac{2x}{x^2+1}$

   Die Funktion ist streng monoton fallend für $x < 0$.

   Die Funktion ist streng monoton steigend für $x > 0$.

   b) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten der Funktion f.

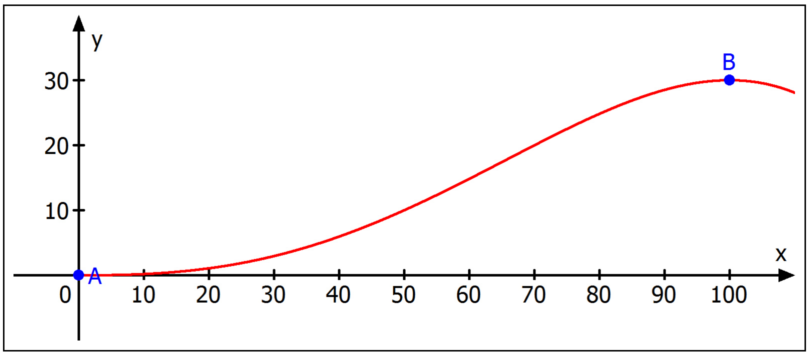
   $f''(x) = \frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2+2-4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}$

   Die Funktion ist konkav gekrümmt für $x < -1$.

   Die Funktion ist konvex gekrümmt für $-1 < x < 1$.

   Die Funktion ist konkav gekrümmt für $x > 1$.

2. Das Profil eines Skihanges wird durch den Graphen der Funktion f mit der Funktionsgleichung $f(x) = -0{,}000\,000\,8 \cdot x^4 + 0{,}000\,1 \cdot x^3 + 0{,}001 \cdot x^2$ zwischen den Punkten $A(0 \mid y_A)$ und $B(100 \mid y_B)$ beschrieben. Die Punkte A und B liegen auf dem Skihang.



(1 Längeneinheit entspricht 1 Meter)

a) Ermitteln Sie den Höhenunterschied zwischen den Punkten A und B.

$h = f(100) - f(0) = 30$

Der Höhenunterschied beträgt 30 m.

b) Bestimmen Sie den maximalen Anstieg des Skihanges und bestimmen Sie den durchschnittlichen Anstieg des Skihanges zwischen den Punkte A und B.

1. Ableitung:

$f(x) = -0{,}000\,0032 \cdot x^3 + 0{,}000\,3 \cdot x^2 + 0{,}002 \cdot x$

Maximum mit GTR: $f'(65{,}67) \approx 0{,}5188$

Der maximale Anstieg beträgt etwa 0,5188.

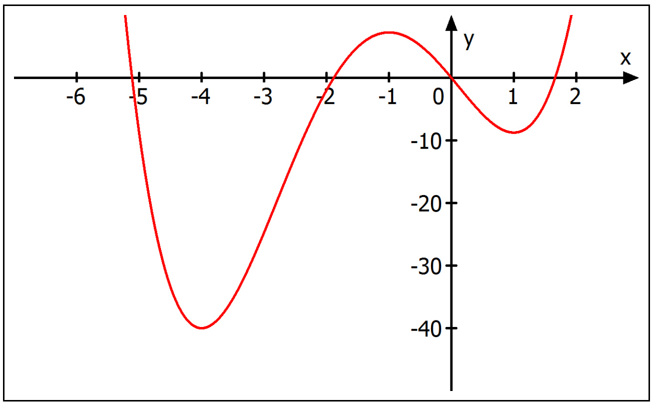
$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{30\text{m}}{100\text{m}} = 0{,}3$

Der durchschnittliche Anstieg beträgt 0,3.

c) Anna befindet sich gerade im Punkt A und Ben befindet sich gerade im Punkt B.
Annas und Bens Augen befinden sich jeweils 1,60 m über dem Boden. Untersuchen Sie, ob sich die beiden gegenseitig (in die Augen) sehen können.
Idee: Gerade durch die Punkt $A(0 \mid 1,6)$ und $B(100 \mid 31,6)$ mit GTR:
$y = 0,3x + 1,6$
Die Gerade schneidet in dem genannten Intervall den Graphen des Skihanges nicht, deshalb können sich die beiden sehen.

3. Gegeben ist die Funktion g mit der Gleichung $g(x) = \frac{3}{4}x^4 + 4x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 12x$.
   a) Ermitteln Sie die lokalen Extrempunkte.

   $T_1(-4 \mid -40)$; $H(-1 \mid 7,25)$; $T_2(1 \mid -8,75)$



   b) Begründen Sie, dass die Funktion genau einen globalen Extrempunkt hat.
   Der erste Tiefpunkt ist der globale Tiefpunkt.
   Es handelt sich um den Tiefpunkt mit der kleinsten y-Koordinate.
   Außerdem konvergiert die Funktion gegen + unendlich.
   Deshalb gibt es kein globales Maximum.

   c) Die Funktion $f(x) = g(x) + c$ soll genau 3 Nullstellen besitzen.
   Geben Sie alle Möglichkeiten für den Wert c an.
   Idee: Die Funktion wird so verschoben, dass der Hochpunkt bzw. der zweite Tiefpunkt auf der x-Achse liegt.

   $c = -7,25$

   $c = +8,75$